Correction TD3

Correction exercice 1.

1. $P(X=0)=\frac{3}{8}$, $P(X=1)=\frac{5}{8}$

   $P(Y=0\ /\ X=0)=\frac{2}{7}$

   $P(Y=0\ /\ X=1)=\frac{3}{7}$

   $P(Y=1\ /\ X=0)=\frac{5}{7}$

   $P(Y=1\ /\ X=1)=\frac{4}{7}$

   $(X,Y)(\Omega)=\{(0,0)\,(0,1)\,(1,0)\,(1,1)\}$

   $P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0\ /\ X=0)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$

   $P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1\ /\ X=0)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

   $P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0\ /\ X=1)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$

   $P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1\ /\ X=1)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$

$X \setminus Y$	0	1
0	$\frac{6}{56}$	$\frac{15}{56}$
1	$\frac{15}{56}$	$\frac{20}{56}$

   Loi marginale de X

k	0	1
$P(X=k)$	$\frac{21}{56}$	$\frac{35}{56}$

   Loi marginale de Y

k	0	1
$P(Y=k)$	$\frac{21}{56}$	$\frac{35}{56}$

2. Loi de $X\ /\ Y=0$

   $P(X=k/Y=0)=\frac{P(X=k,Y=0)}{P(Y=0)}$

$X\ /\ Y=0$	0	1
$P(X=k\ /\ Y=0)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{15}{21}$

   Loi de $X\ /\ Y=1$

   $P(X=k\ /\ Y=1)=\frac{P(X=k,Y=1)}{P(Y=1)}$

$X/Y=1$	0	1
$P(X=k\ /\ Y=1)$	$\frac{15}{35}$	$\frac{20}{35}$

   Loi de $Y\ /\ X=0$

   $P(Y=k\ /\ X=0)=\frac{P(X=0,Y=k)}{P(X=0)}$

$Y\ /\ X=0$	0	1
$P(Y=k\ /\ X=0)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{15}{21}$

Loi de $Y \ / \ X = 1$

$P(Y = k \ / \ X = 1) = \frac{P(X=1,Y=k)}{P(X=1)}$

$Y \ / \ X = 1$	0	1
$P(Y = k \ / \ X = 1)$	$\frac{15}{35}$	$\frac{20}{35}$

3. si $x < 0$ ou $y < 0$, $F_{X,Y}(x, y) = 0$

   si $x < 1$ et $y < 1$, $F_{X,Y}(x, y) = P(X = 0, Y = 0) = \frac{6}{56}$

   si $x < 1$ et $y < 2$, $F_{X,Y}(x, y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56}$

   si $x < 2$ et $y < 1$, $F_{X,Y}(x, y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56}$

   si $x < 2$ et $y < 2$, $F_{X,Y}(x, y) = 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ \frac{6}{56} & \text{si} \quad x < 1 \text{ et } y < 1 \\ \frac{21}{56} & \text{si} \quad x < 1 \text{ et } y < 2 \\ \frac{21}{56} & \text{si} \quad x < 2 \text{ et } y < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x < 2 \text{ et } y < 2 \end{cases}$$

Correction exercice 2.

1. $Y_n \to P(\lambda)$, $\lambda = \ln 2$

   $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$

   $P(X_n = 1) = P(Y_n = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$

   $P(X_n = 0) = P(Y_n > 0) = 1 - P(Y_n = 0) = \frac{1}{2}$

k	0	1
$P(X_n = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

   X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$

   $X_n \to B\left(\frac{1}{2}\right)$

   a) $P((X_n = 0) \cap (X_m = 0)) = P((Y_n > 0) \cap (Y_m > 0)) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

   $P(X_n = 0) \times P(X_m = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

   $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{4} \Longrightarrow X_n$ et X_m ne sont pas indépendantes.

   b) $E(X_nX_m) = \sum\sum_{k,k' \in \{0,1\}} k \times k' \times P((X_n = k) \cap (X_m = k')) = 1 \times 1 \times P((X_n = 1) \cap (X_m = 1)) = P((Y_n = 0) \cap (Y_m = 0))$

   $= 1 - P\left(\overline{(Y_n = 0) \cap (Y_m = 0)}\right) = 1 - \left(P\left(\overline{(Y_n = 0)} \cup \overline{(Y_m = 0)}\right)\right) = 1 - (P((Y_n > 0) \cup (Y_m > 0))$

   c) $cov(X_n, X_m) = E(X_nX_m) - E(X_n)E(X_m)$

   $E(X_nX_m) = 1 - (P((Y_n > 0) \cup (Y_m > 0)) = 1 - (P(Y_n > 0) + P(Y_m > 0) - P((Y_n > 0) \cap (Y_m > 0))$

$= 1 - (P(X_n = 0) + P(X_m = 0) - \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$E(X_n) E(X_m) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$cov(X_n, X_m) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n}{2}$

   $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{i \neq j}\sum cov(X_i, X_j) = \frac{n}{4} + (n^2 - n)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = n^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Correction exercice 3.

1. $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$

   $Y(\Omega) = \{1, 4\}$

   Loi conjointe du couple (X, Y) :

$X \setminus Y$	1	4
-2	0	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

   Loi marginale de Y :

y	1	4
$P(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. $P(Y = y \ / \ X = x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$

y	1	4
$P(Y = y \ / \ X = 1)$	1	0

   $P(X = x \ / \ Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$

x	-2	-1	1	2
$P(X = x \ / \ Y = 1)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

3. $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

   $E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in X(\Omega)} \sum xyP(X = x, Y = y) = 0$

   $E(X) = 0$

   $E(Y) = \frac{5}{2}$

   $cov(X, Y) = 0$

   X et Y ne sont pas indépendantes bien que $cov(X, Y) = 0$ car

   $P(X = -2, Y = 1) = 0 \neq P(X = -2) \times P(Y = 1) = \frac{1}{8}$

Correction exercice 4.

1. $P(X=i,Y=j)=\frac{2}{k(k+1)}$ pour $1\leq j\leq i\leq k$

   $P(X=i)=\sum_{j=1}^{i}P(X=i,Y=j)=\sum_{j=1}^{i}\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2i}{k(k+1)}$ pour $1\leq i\leq k$

   $P(Y=j)=\sum_{i=j}^{k}P(X=i,Y=j)=\sum_{i=j}^{k}\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2(k-j+1)}{k(k+1)}$ pour $1\leq j\leq k$

2. $P(X=i\ /\ Y=j)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=\frac{1}{k-j+1}$ pour $1\leq j\leq i\leq k$

3. $P(Y=j\ /\ X=i)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(X=i)}=\frac{1}{i}$ pour $1\leq j\leq i\leq k$

4. $E\left(X/Y=j\right)=\sum_{i=j}^{k}i\times P(X=i\ /\ Y=j)=\sum_{i=j}^{k}\frac{i}{k-j+1}=\frac{j+k}{2}$

   $E\left(X/Y\right)=\frac{Y+k}{2}$

   $V\left(X/Y=j\right)=E\left(X^2/Y=j\right)-\left(E\left(X/Y=j\right)\right)^2$

   $E\left(X^2/Y=j\right)=\sum_{i=j}^{k}i^2\times P(X=i\,/\,Y=j)=\sum_{i=j}^{k}\frac{i^2}{k-j+1}=\frac{1}{6}\left(-j+k+2jk+2j^2+2k^2\right)$

   $V\left[X/Y=j\right]=\frac{(j-k)(j-k-2)}{12}$

   $E\left(Y/X=i\right)=\sum_{j=1}^{i}j\times P(Y=j/X=i)=\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}=\frac{i+1}{2}$

   $V\left(Y/X=i\right)=E\left(Y^2/X=i\right)-\left(E\left(Y/X=i\right)\right)^2$

   $E\left(Y^2/X=i\right)=\sum_{j=1}^{i}j^2\times P(Y=j\ /\ X=i)=\sum_{j=1}^{i}\frac{j^2}{i}=\frac{(i+1)(2i+1)}{6}$

   $V\left(Y/X=i\right)=\frac{i^2-1}{12}$

   $E\left(X\right)=E\left(E\left(X/Y\right)\right)=\sum_{j=1}^{k}E\left(X/Y\right)P(Y=j)=\sum_{j=1}^{k}\frac{j+k}{2}\frac{2(k-j+1)}{k(k+1)}=\frac{2k+1}{3}$

   ou $E(X)=\sum_{i=1}^{k}i\times P(X=i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i^2}{k(k+1)}=\frac{2k+1}{3}$

   $V\left(X\right)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$

   $E(X^2)=\sum_{i=1}^{k}i^2\times P(X=i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i^3}{k(k+1)}=\frac{k(k+1)}{2}$

   $V\left(X\right)=\frac{(k+2)(k-1)}{18}$

   $E\left(Y\right)=E\left(E\left(Y/X\right)\right)=\sum_{i=1}^{k}E\left(Y/X\right)P(X=i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i+1}{2}\frac{2i}{k(k+1)}=\frac{k+2}{3}$

   ou $E\left(Y\right)=\sum_{j=1}^{k}j\times P(Y=j)=\sum_{j=1}^{k}j\times\frac{2(k-j+1)}{k(k+1)}=\frac{k+2}{3}$

   $V\left(Y\right)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2$

   $E(Y^2)=\sum_{j=1}^{k}j^2\times P(Y=j)=\sum_{j=1}^{k}j^2\times\frac{2(k-j+1)}{k(k+1)}=\frac{(k+1)(k+2)}{6}$

   $V\left(Y\right)=\frac{(k+2)(k-1)}{18}$

5. $\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$

   $E(XY)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}ijP(X=i,Y=j)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\frac{2ij}{k(k+1)}=\frac{(3k+1)(k+2)}{12}$

   Remarques :

   $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\rho_{X,Y} = \frac{\frac{(3k+1)(k+2)}{12} - \frac{2k+1}{3}\frac{k+2}{3}}{\sqrt{\frac{(k+2)(k-1)}{18}}\sqrt{\frac{(k+2)(k-1)}{18}}} = \frac{1}{2}$

Correction exercice 5.

1. $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^y ke^{-y}dxdy = k$

   $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = 1 \Longleftrightarrow k = 1$

   Pour $k = 1$ on a $f(x,y) \geq 0$

   $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = 1_{R_+^*}(x)\int_x^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}1_{R_+^*}(x)$

   $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = 1_{R_+^*}(y)\int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}1_{R_+^*}(y)$

   $f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y} & \text{si} \quad y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

3. $f(x,y) = e^{-y}1_{0<x<y}$

   $f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}ye^{-y}1_{R_+^*}(x)1_{R_+^*}(y)$

   $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y) \Longrightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes.

   a) $f_{X/Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{si} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} & \text{si} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   $= \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   b) $E(X/Y = y) = \int_{\mathbb{R}} xf_{X/Y=y}(x)dx = \int_0^y x\frac{1}{y}dx = \frac{y}{2}$

   $E(X/Y) = \frac{Y}{2}$

4. $U = Y - X$ et $V = X$

   a) $\begin{cases} U = Y - X \\ V = X \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = V \\ Y = U + V \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(u,v) = v \\ y(u,v) = u + v \end{cases}$

   $0 < x < y \Longleftrightarrow 0 < v < u + v \Longleftrightarrow u > 0$ et $v > 0$

   $f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v))\,|\det J| & \text{si} \quad u > 0 \text{ et } v > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $|\det J| = 1$

$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} e^{-(u+v)} & \text{si} \quad u > 0 \text{ et } v > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Première méthode de calcul des densités marginales:

densité marginale de U:

$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)dv = 1_{R_+^*}(u) \int_0^{+\infty} e^{-(u+v)}dv = e^{-u}1_{R_+^*}(u)$

$f_U(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si} \quad u > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$U \to \xi(1)$ (U suit une loi exponentielle de paramètre 1)

densité marginale de V:

$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)du = 1_{R_+^*}(v) \int_0^{+\infty} e^{-(u+v)}du = e^{-v}1_{R_+^*}(v)$

$f_V(v) = \begin{cases} e^{-v} & \text{si} \quad v > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$V \to \xi(1)$ (V suit une loi exponentielle de paramètre 1)

Deuxième méthode de calcul des densités marginales:

$f_{U,V}(u,v) = e^{-(u+v)}1_{R_+^*}(u)1_{R_+^*}(v) = \left(e^{-u}1_{R_+^*}(u)\right)\left(e^{-v}1_{R_+^*}(v)\right) = f_U(u)f_V(v)$

où f_U est la ddp de la v.a U et f_V est la ddp de la v.a V

b) $f_{U,V}(u,v) = e^{-(u+v)}1_{R_+^*}(u)1_{R_+^*}(v)$

$f_U(u)f_V(v) = e^{-u}e^{-v}1_{R_+^*}(u)1_{R_+^*}(v)$

$f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v) \Longrightarrow U$ et V sont indépendantes.

5. $U \to \xi(1)$ et $V \to \xi(1) \Longrightarrow$

   $V(X) = V(V) = 1$

   $V(Y) = V(U+V) = V(U) + V(V) = 2$

   $cov(X,Y) = cov(V, U+V) = cov(V,U) + cov(V,V) = 0 + V(V) = 1$

   la matrice de covariance de (X,Y) est $\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} V(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$

   D'où

   $\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Correction exercice 6.

1. $F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varepsilon X < y) = P(\varepsilon X < y, \varepsilon = -1) + P(\varepsilon X < y, \varepsilon = 1)$

   $= P(-X < y)P(\varepsilon = -1) + P(X < y)P(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}\left(P(X > -y) + P(X < y)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - P(X < -y) + P(X < y)\right)$

   $= \frac{1}{2}\left(1 - F_X(-y) + F_X(y)\right) = \frac{1}{2}\left(F_X(y) + F_X(y)\right) = F_X(y)$

   $F_Y(y) = F_X(y) \Longrightarrow X$ et Y suivent la même loi d'où $Y \to N(0,1)$

2. $\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
   $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ car $X \to N(0,1)$ et $Y \to N(0,1)$
   $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
   $E(X) = E(Y) = 0$
   $E(XY) = E(\varepsilon X^2) = E(\varepsilon X^2/\varepsilon = -1)P(\varepsilon = -1) + E(\varepsilon X^2/\varepsilon = 1)P(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}\left(E(-X^2) + E(X^2)\right) = 0$
   $cov(X,Y) = 0$

   a) $P\left(X \in [-a,a]\right) = P\left(-a \leq X \leq a\right) = F_X(a) - F_X(-a) = 2F_X(a) - 1$
   b) $P\left(X \in [-a,a], Y \in [-b,b]\right) = P\left(-a \leq X \leq a, -a \leq Y \leq a\right)$
      $= P\left(-a \leq X \leq a, -a \leq \varepsilon X \leq a\right)$
      $= P\left(-a \leq X \leq a, -a \leq \varepsilon X \leq a, \varepsilon = -1\right) + P\left(-a \leq X \leq a, -a \leq \varepsilon X \leq a, \varepsilon = 1\right)$
      $= P\left(-a \leq X \leq a, -a \leq X \leq a\right)P(\varepsilon = -1) + P\left(-a \leq X \leq a, -a \leq X \leq a\right)P(\varepsilon = 1)$
      $= \frac{1}{2}\left(P(-a \leq X \leq a) + P(-a \leq X \leq a)\right) = 2F_X(a) - 1$
      $P\left(Y \in [-a,a]\right) = P\left(-a \leq Y \leq a\right) = P\left(-a \leq \varepsilon X \leq a\right) = P\left(-a \leq \varepsilon X \leq a, \varepsilon = -1\right) + P\left(-a \leq \varepsilon X \leq a, \varepsilon = 1\right)$
      $= P\left(-a \leq X \leq a\right)P(\varepsilon = -1) + P\left(-a \leq X \leq a\right)P(\varepsilon = 1) = 2F_X(a) - 1$
      On a :
      $P\left(X \in [-a,a], Y \in [-b,b]\right) = 2F_X(a) - 1$
      $P\left(X \in [-a,a]\right)P\left(Y \in [-a,a]\right) = \left(2F_X(a) - 1\right)^2$
      X et Y ne sont pas indépendantes car
      $P\left(X \in [-a,a], Y \in [-b,b]\right) \neq P\left(X \in [-a,a]\right)P\left(Y \in [-a,a]\right)$
   c) $P(X = Y) = P(X = \varepsilon X)$
      $X = \varepsilon X$ dans deux cas : soit ($X = 0$ et $\varepsilon \in \{-1,1\}$) ou ($X \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \nVdash$)
      $P(X = \varepsilon X) = P(X = 0, \varepsilon \in \{-1,1\}) + P(\varepsilon = 1, X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{X}{=}0)P(\varepsilon \in$ {-1,1}$) + P(\varepsilon{=}1)P(X \in \mathbb{R})$ (car X et ε sont indépendantes)
      $= 0 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
      ($P(X = 0) = 0$ car X est une v.a.r continue)

Correction exercice 7.

1. X et Y suivent la même loi et donc par symétrie on a $F_X(Y) = F_Y(X) \iff P(X < Y) = P(Y < X)$
   $P(X < Y) = 1 - P(X > Y) \iff P(Y < X) = 1 - P(X > Y) \iff P(Y < X) = \frac{1}{2}$
   D'où $P(X > Y) = \frac{1}{2}$
2. $U = \inf(X,Y)$ et $V = \sup(X,Y)$

a) $F_U(u) = P(U < u) = P(\inf(X,Y) < u) = 1 - P(\inf(X,Y) > u) = 1 - P(X > u, Y > v) = 1 - P(X > u)P(Y > v)$ car X et Y sont indépendantes
$F_U(u) = 1 - (1 - P(X < u))(1 - P(Y < v)) = 1 - (1 - F_X(u))(1 - F_Y(v)) = 1 - (1 - F(u))^2$ où F est la fonction de répartition de la loi exponentielle.
$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
D'où $F_U(u) = 1 - \left(1 - 1 + e^{-\lambda u}\right)^2 = 1 - e^{-2\lambda u}$ si $u > 0$
C'est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 2λ d'où $U = \inf(X,Y) \to \xi\,(2\lambda)$

b) $P(V \leq v) = P(U \leq u, V \leq v) + P(U > u, V \leq v) \iff (U \leq u, V \leq v) = P(V \leq v) - P(U > u, V \leq v)$

c) $F_{U,V}(u,v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(V \leq v) - P(U > u, V \leq v) = P(\sup(X,Y) \leq v) - P(\inf(X,Y) > u, \sup(X,Y) \leq v)$
$= P(X \leq v, Y \leq v) - P(X > u, Y > u, X \leq v, Y \leq v) = P(X \leq v)P(Y \leq v) - P(u < X \leq v, u < Y \leq v)$
$= P(X \leq v)P(Y \leq v) - P(u < X \leq v)P(u < Y \leq v)$
Si $u \leq v$ on aura $F_{U,V}(u,v) = F(v)^2 - (F(v) - F(u))^2$
Si $u > v$ on aura $F_{U,V}(u,v) = F(v)^2$
$F_{U,V}(u,v) = \begin{cases} (F(v))^2 & \text{si} \quad u > v \\ (F(v))^2 - (F(v) - F(u))^2 & \text{si} \quad u \leq v \end{cases}$
densité du couple (U,V) :
$f_{U,V}(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(F_{U,V}(u,v)\right) = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left((F(v))^2\right) & \text{si} \quad u > v \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left((F(v))^2 - (F(v) - F(u))^2\right) & \text{si} \quad u \leq v \end{cases}$
$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u > v \\ 2f(u)f(v) & \text{si} \quad u \leq v \end{cases}$
la loi conjointe $f_{U,V}(u,v) = 2f(u)f(v)1_{u \leq v} \neq f(u)f(v)$ donc U et V ne sont pas indépendantes.

Correction exercice 8.

1. a) Vérifier que la v.a. $U + V$ est de loi $G(a+b, \lambda)$
$U \to G(a, \lambda)$, $V \to G(b, \lambda)$
$\Phi_U(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$
En effet, $\Phi_U(t) = E\left(e^{itU}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} f_U(u) du = \int_0^{+\infty} e^{itu} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-\lambda u} du = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-(\lambda - it)u} du$
Soit $z = \frac{\lambda - it}{\lambda} u$
$\Phi_U(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{\lambda z}{\lambda - it}\right)^{a-1} e^{-\lambda z} \frac{\lambda}{\lambda - it} dz = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} e^{-\lambda z} dz = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$
$\Phi_{U+V}(t) = E\left(e^{it(U+V)}\right) = E\left(e^{itU} e^{itV}\right) = E\left(e^{itU}\right) E(e^{itV})$ (car U et V sont indépendantes)

$\Phi_{U+V}(t) == \Phi_U(t)\Phi_V(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^b = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^{a+b}$

$\Longrightarrow U+V \rightarrow G(a+b,\lambda)$

b) Vérifier que que la v.a. cU est de loi $G\left(a, \frac{\lambda}{c}\right)$

Soit $Z = cU$

$\Phi_Z(t) = \Phi_{cU}(t) = E\left(e^{itcU}\right) = \Phi_U(ct) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-ict}\right)^a = \left(\frac{1}{1-i\left(\frac{c}{\lambda}\right)t}\right)^a$

$\Longrightarrow Z = cU \rightarrow G(a, \frac{c}{\lambda})$

2. $X \rightarrow N(0,1)$ et $U \rightarrow G(a,\lambda)$.

   Les fonctions de densité des v.a. X et U sont :

   $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $f_U(u) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-\lambda u}\ \forall x > 0$

   a) Vérifier que la densité de la v.a. X^2 est de loi $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   Soit $Z = X^2$

   $F_Z(z) = P(Z < z) = P(X^2 < z) = P(-\sqrt{z} < X < \sqrt{z}) = 2F_X(\sqrt{z}) - 1$

   $f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = \frac{2}{2\sqrt{z}} f_X(\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}}\ \forall z > 0$

   $f_Z(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}u} \quad \forall z > 0$

   $Z = X^2 \rightarrow G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   b) i. On pose $T = \frac{X}{\sqrt{U}}$ et $S = \sqrt{U}$, Déterminer la densité du couple (T,S)

   Soit $f_{T,S}(t,s)$ la densité du couple (T,S)

   $\left\{\begin{array}{l} T = \frac{X}{\sqrt{U}} \\ S = \sqrt{U} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = TS \\ U = S^2 \end{array}\right.$

   $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \approx = \frac{\frown}{\sqrt{\approxeq}} \in \mathbb{R}$

   $s = \sqrt{u} > 0$

   $f_{T,S}(t,s) = f_{X,U}(ts, s^2)\,|\det J|$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $s > 0$

   où $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} & \frac{\partial x(t,s)}{\partial s} \\ \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} & \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 2s \end{pmatrix}$

   $|\det J| = 2s^2$

   X et U deux variables aléatoires réelle indépendantes donc $f_{X,U}(ts,s^2) = f_X(ts) f_U(s^2)$

   $f_{T,S}(t,s) = f_{X,U}(ts,s^2)\,|\det J| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2 s^2}{2}} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \left(s^2\right)^{a-1} e^{-\lambda s^2} 2s^2 = \frac{2\lambda^a}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} s^{2a} e^{-(\lambda + \frac{t^2}{2})s^2}$
   pour $t \in \mathbb{R}$ et $s > 0$

   b) ii. Déterminer la densité de la v.a. T.

   $f_T(t)$ est la densité marginale de la v.a. T

   $f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{T,S}(t,s) ds = \int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^a}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} s^{2a} e^{-(\lambda+\frac{t^2}{2})s^2} ds \overset{z=s^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\lambda^a}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} z^a e^{-(\lambda+\frac{t^2}{2})z} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz =$
   $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} z^{a-\frac{1}{2}} e^{-(\lambda+\frac{t^2}{2})z} dz$

$= \frac{\lambda^a}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} z^{\left(a+\frac{1}{2}\right)-1} e^{-(\lambda+\frac{t^2}{2})z} dz = \frac{\lambda^a}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\left(\lambda+\frac{t^2}{2}\right)^{a+\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda^a}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\lambda^{a+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t^2}{2\lambda}\right)^{a+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{2\lambda}\right)^{a+\frac{1}{2}}}$

$\Longrightarrow f_T(t) = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{2\lambda}\right)^{a+\frac{1}{2}}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

3. déduire sans calcul à partir de 1.b) et 2.b) la densité de la v.a. $X_1^2 + ... + X_n^2$
   $X \to N(0,1)$ alors $X^2 \to G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
   $U \to G(a,\lambda)$, $V \to G(b,\lambda)$ alors $U + V \to G(a+b,\lambda)$ et $cU \to G(a, \frac{c}{\lambda})$
   Donc $X_i^2 \to G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $X_1^2 + ... + X_n^2 \to G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

4. déduire sans calcul la densité de la v.a. $\frac{Y}{\sqrt{\frac{X_1^2+...+X_n^2}{n}}}$ (loi de Student)
   $U \to G(a,\lambda)$ alors $cU \to G(a, \frac{c}{\lambda})$
   $X_1^2 + ... + X_n^2 \to G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) \Longrightarrow \frac{1}{n}\left(X_1^2 + ... + X_n^2\right) \to G(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$
   La densité de $T = \frac{X}{\sqrt{U}}$ où $X \to N(0,1)$ et $U \to G(a,\lambda)$ est $f_T(t) = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{2\lambda}\right)^{a+\frac{1}{2}}}$
   $\forall t \in \mathbb{R}$
   La densité de la variable $\frac{Y}{\sqrt{\frac{X_1^2+...+X_n^2}{n}}}$ où $Y \to N(0,1)$ et $\frac{X_1^2+...+X_n^2}{n} \to G(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ est la densité de $T = \frac{X}{\sqrt{U}}$ avec $a = \frac{n}{2}$ et $\lambda = \frac{n}{2}$
   $f_{\frac{Y}{\sqrt{\frac{X_1^2+...+X_n^2}{n}}}}(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Correction exercice 9.

1. $X \to G(\lambda)$
   $P(X = x) = (1-\lambda)^{x-1}\lambda$ pour $x \in \mathbb{N}^*$
   $\forall x \in [n, n+1[$, $F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x=1}^{n} (1-\lambda)^{x-1}\lambda = 1 - (1-\lambda)^n$

   a) $G_X(s) = E(s^X) = \frac{s\lambda}{1-s(1-\lambda)}$
   $E(X(X-1)) = G_X''(1)$
   $G_X'(s) = \frac{\lambda}{(1-s(1-\lambda))^2}$, $G_X'(1) = \frac{1}{\lambda}$
   $G_X''(s) = \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(1-s(1-\lambda))^3}$, $G_X''(1) = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^2}$
   $\Longrightarrow E(X(X-1)) = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^2}$

   b) $E(Y) = E(e^{-X}) = E\left(\left(\frac{1}{e}\right)^X\right) = G_X\left(\frac{1}{e}\right) < \infty$ (finie)$\Longrightarrow E(Y)$ existe
   $E(Y) = G_X\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\lambda}{e-(1-\lambda)}$

2. $Z=(-1)^X$

$Z(\Omega)=\{-1,1\}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
z	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	...

$P(Z=-1)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k+1)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda)^{2k+1-1}\lambda=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda)^{2k}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\left((1-\lambda)^2\right)^k=\frac{1}{2-\lambda}$

$P(Z=1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda)^{2k-1}\lambda=\frac{\lambda}{1-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda)^{2k}=\frac{\lambda}{1-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left((1-\lambda)^2\right)^k=\frac{1-\lambda}{2-\lambda}$

z	-1	1
$P(Z=z)$	$\frac{1}{2-\lambda}$	$\frac{1-\lambda}{2-\lambda}$

$E(Z)=\frac{-\lambda}{2-\lambda}$

Correction exercice 11.

$X\to G(p)$ et $Y\to G(p)$

1. $G_X(z)=E(z^X)=\sum_{z=1}^{\infty}z^kP(Z=k)=\sum_{z=1}^{\infty}z^k(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{z=1}^{\infty}(z(1-p))^k=\frac{p}{1-p}\left(\sum_{z=0}^{\infty}(z(1-p))^k-1\right)=\frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-z(1-p)}-1\right)=\frac{pz}{1-z(1-p)}$

   De même $G_Y(z)=E(z^Y)=\frac{pz}{1-z(1-p)}$.

   $G_S(z)=E(z^s)=E\left(z^{X+Y}\right)=E(z^Xz^Y)=E(z^X)E(z^Y)=\frac{p^2z^2}{(1-z(1-p))^2}$.

2. $S(\Omega)=\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

   $P(S=n)=P(X+Y=n)=\sum_{i=1}^{n-1}P(X=i\text{ et }Y=n-i)$

   $=\sum_{i=1}^{n-1}P(X=i\,)(Y=n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}(1-p)^{n-i-1}p=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$

3. $\forall X\geqslant 1$ et $n>k$

   $P(X=k\,/\,S=n)=\dfrac{P(X=k\text{ et }S=n)}{P(S=n)}=\dfrac{P(X=k\text{ et }X+Y=n)}{P(S=n)}=\dfrac{P(X=k\text{ et }Y=n-k)}{P(S=n)}$

   $=\dfrac{P(X=k\,)P(Y=n-k)}{P(S=n)}=\dfrac{(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\dfrac{1}{n-1}$

   $E(X\,/\,S=n)=\sum_{k=1}^{n-1}kP(X=k\,/\,S=n)=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=\dfrac{1}{n-1}\dfrac{(n-1)\,n}{2}=\dfrac{n}{2}$

   $\Rightarrow E(X\,/\,S)=\dfrac{S}{2}$

4. $E(E(X/S)) = E\left(\dfrac{S}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} nP(S=n) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,(1-p)^{n-2}\,p^2 =$
$\frac{1}{2}p^2 \dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(1-p)^n\right) = \dfrac{1}{2}p^2\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\dfrac{(1-p)^2}{p}\right) = \dfrac{1}{p} = E(X)$
D'où $E(E(X/S)) = E(X)$

Correction exercice 12.

1. **a)** $(a-b\rho)^2 + (1-\rho^2)\,b^2 = a^2 - 2\rho ab + b^2$

   b) $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2+2\rho xy+y^2\right)}dx$

   $= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((x-\rho y)^2+\left(1-\rho^2\right)y^2\right)}dx$

   $= e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}dx$

   $= e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2}dx \overset{t=\frac{x-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}}{=} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

   De même $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

   X et $Y \to N(0,1)$

   c) $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y) \Longrightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes

2. Pour $\rho = 0$ on aura $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right\}\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^{\ 2}$

   a) $\Phi_{X+Y}(t) = E\left(e^{it(X+Y)}\right) = E\left(e^{itX}e^{itY}\right) = E\left(e^{itX}\right)E(e^{itY})$ car pour $\rho = 0$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ et donc X et Y sont indépendantes.

   $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-t^2}$

   Démonstration:

   $\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}+itx}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2-\frac{t^2}{2}}dx \overset{z=x-it}{=}$
   $e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = e^{-\frac{t^2}{2}}$

   b) $X+Y \to N(0,\sqrt{2})$

   Démonstration:

   X suit la loi normale de paramètres 0 et 1 et la fonction caractéristique de X est $\Phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

   Soit $U = \sigma X + m$, $U \to N(m,\sigma)$

   La fonction caractéristique de U est

   $\Phi_U(t) = \Phi_{\sigma X+m}(t) = E(e^{it(\sigma X+m)}) = E(e^{it\sigma X+itm}) = e^{itm}E(e^{it\sigma X}) = e^{itm}\Phi_X(t\sigma) = e^{itm}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

   $\Phi_{X+Y}(t) = e^{-t^2} \Longrightarrow X+Y$ suit la loi normale de paramètres $m=0$ et $\sigma = \sqrt{2}$

   $X+Y \to N(0,\sqrt{2})$