Correction TD2

Correction Exercice 1.

1. $P(X=2)=\frac{e^{-1}}{2!}=0.184$
2. $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{e^{-1}}{0!}+\frac{e^{-1}}{1!}=2e^{-1}=0.736$
3. la fonction $c/x!$ est une densité de probabilité si $\frac{c}{x!}\geq 0$ et $\sum\limits_{x\in\mathbb{N}}\frac{c}{x!}=1$

   $\sum\limits_{x\in\mathbb{N}}\frac{c}{x!}=ce^{1}=1\Longleftrightarrow c=e^{-1}$.

   Pour $c=e^{-1}$ on a $\frac{c}{x!}\geq 0\ \forall x=0,1,2,...$

   Donc la fonction $\frac{c}{x!}$ est une densité de probabilité pour $c=e^{-1}$.
4. p_n est une probabilité si $p_n\geq 0$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}p_n=1$

   $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}p_n=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\alpha\frac{\lambda^n}{n!}=\alpha\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{\lambda^n}{n!}=\alpha e^{\lambda}$

   $\sum\limits_{x\in\mathbb{N}}p_n=1\Longleftrightarrow \alpha e^{\lambda}=1\Longleftrightarrow \alpha=e^{-\lambda}$

   Pour $\alpha=e^{-\lambda}$, $p_n\geq 0$ donc $\alpha=e^{-\lambda}$.

Correction Exercice 2.

la suite (u_n) définit une loi de probabilité si $u_n\geq 0$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n=1$

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{8}\frac{2+a^n}{n!}\right)=\frac{1}{8}\left(2\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}+\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{a^n}{n!}\right)=\frac{1}{8}\left(2e+e^{a}\right)$

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n=1\Longleftrightarrow\frac{1}{8}\left(2e+e^{a}\right)=1\Longleftrightarrow a=\ln(8-2e)$

Pour $a=\ln(8-2e)$ on vérifie que $u_n\geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ et donc la suite (u_n) définit bien une loi de probabilité pour $a=\ln(8-2e)$

Correction Exercice 3.

Soient les évènements :
B_i :"tirer une boule blanche au $i^{ème}$ tirage"
N_i :"tirer une boule noire au $i^{ème}$ tirage"

premier tirage	deuxième tirage
B_1	N_2
N_1	B_2
N_1	N_2

$\Omega=\{(B_1,N_2),(N_1,B_2),(N_1,N_2)\}$

$P\left(B_1 \cap N_2\right) = P(B_1)P(N_2/B_1) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$
$P\left(N_1 \cap B_2\right) = P(N_1)P(B_2/N_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
$P\left(B_1 \cap N_2\right) = P(N_1)P(N_2/N_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

X est la v.a.r égale au nombre de boules noires tirées.
$X\left(\Omega\right) = \{1, 2\}$
$P(X = 1) = P\left(B_1 \cap N_2\right) + P\left(N_1 \cap B_2\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$
$P(X = 2) = P\left(N_1 \cap N_2\right) = \frac{2}{9}$

x	1	2
$P(X = x)$	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

Correction Exercice 4.

1. Soit B_i le numéro de la boule tirée au $i^{ème}$ tirage.
   $P(X_1 = 1) = P\left(B_1 = n\right) = \frac{1}{n}$
   $P(X_1 = 2) = P\left((B_1 < n) \cap (B_2 = n)\right) = P\left(B_1 < n\right) P\left(B_2 = n \;/\; B_1 < n\right) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$
   ...
   $P(X_1 = k) = P\left((B_1 < n) \cap (B_2 < n) \cap ... \cap (B_{k-1} < n) \cap (B_k = n)\right) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times ... \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$
   $\Longrightarrow P(X_1 = k) = \frac{1}{n} \; \forall k = 1, 2, ..., n.$
   X suit une loi uniforme sur $[1, n]$
   $X \to U_{([1,n])}$.

2. Il reste $(n - k)$ boules dans l'urne après les k tirages.
   $P(X_2 = i \;/\; X_1 = k) = \frac{1}{n-k} \; \forall i = 1, 2, ..., n - k.$

Donc X_2 sachant $X_1 = k$ suit une loi uniforme sur $[1, n - k]$
$X_2 /\; X_1 = k \to U_{([1,n-k])}$

Correction Exercice 5.

1. $X_1\left(\Omega\right) = \{1, 2, ..., n\}$
   $P(X_1 = k) = \frac{1}{n}$
   $X_1 \to U_{([1,n])}$

2. $X_2\left(\Omega\right) = \{1, 2, ..., n\}$
   $P(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{n} P\left((X_2 = j) \cap (X_1 = i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left((X_2 = j) \,/\, (X_1 = i)\right) P\left(X_1 = i\right)$
   $P\left(X_1 = i\right) = \frac{1}{n}$

$$P\left((X_2=j)\,/\,(X_1=i)\right)=\begin{cases}\frac{1}{n+i} & \text{si} \quad i\neq j\\ \frac{i+1}{n+i} & \text{si} \quad i=j\end{cases}$$

$$P\left(X_2=j\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{j+1}{n+j}+\sum_{i=1\ ,\ i\neq j}^{n}\frac{1}{n+i}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+j}+\frac{j}{n+j}+\sum_{i=1\ ,\ i\neq j}^{n}\frac{1}{n+i}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{j}{n+j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right)$$

$$\Longrightarrow P\left(X_2=j\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{j}{n+j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right)\ \forall j\in\{1,2,...,n\}$$

$$\sum_{j=1}^{n}P\left(X_2=j\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{j}{n+j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{n}{n+j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(n-\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n+j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\right)=1$$

Correction Exercice 6.

1. Soit K la v.a.r égale au nombre total de boules tirées et soient les évènements :
   A:"tirer $(n-1)$ boules blanches au $(k-1)^{ième}$ tirage"
   B:"tirer une boule blanche au $k^{ième}$ tirage"

   $K(\Omega)=\{n,...,2n\}$
   $P(K=k)=P(A\cap B)=P(A)P(B/A)$
   $P(B/A)=\frac{1}{2n-(k-1)}=\frac{1}{2n-k+1}$
   $P(A)=\frac{C_n^{n-1}C_n^{k-n}}{C_{2n}^{k-1}}=\frac{n\frac{n!}{(k-n)!(2n-k)!}}{\frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k+1)!}}$

   $P(K=k)=\frac{n\times n!(k-1)!(2n-k+1)!}{(k-n)!(2n-k)!(2n)!}\times\frac{1}{2n-k+1}=\frac{n\times n!(k-1)!}{(k-n)!(2n)!}$
   $\Longrightarrow P(K=k)=\frac{n\times n!(k-1)!}{(k-n)!(2n)!}\quad\forall k\in\{n,...,2n\}$

2. $\sum_{k=n}^{2n}P(K=k)=1\Longleftrightarrow\sum_{k=n}^{2n}\frac{n\times n!(k-1)!}{(k-n)!(2n)!}=1\Longleftrightarrow\frac{n\times n!}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n}\frac{(k-1)!}{(k-n)!}=1\Longleftrightarrow\sum_{k=n}^{2n}\frac{(k-1)!}{(k-n)!}=\frac{(2n)!}{n\times n!}$
   $\Longrightarrow S_n=\frac{(2n)!}{n\times n!}$

Correction Exercice 7.

1. N_1 est la v.a.r égale au numéro du tirage où on obtient la $1^{ère}$ réalisation d'un évènement A_i.

   Pour avoir une réalisation de A_i il faut faire au moins un tirage comme on peut faire une infinité de tirages.

   $N_1(\Omega) = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$

   La probabilité d'obtenir un A_k au $k^{ième}$ tirage pour la première fois est

   $P(N_1 = k) = P\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k\right) = (1-a)^{k-1}\, a\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$

2. N_r est la v.a.r égale au numéro du tirage où on obtient la $r^{ère}$ réalisation d'un évènement A_i.

   Il faut faire au moins r tirages et au plus une infinité de tirages.

   $N_r(\Omega) = \{r, r+1, r+2, ...\}$

   $P(N_r = k) = C_{k-1}^{r-1}(1-a)^{k-r}\, a^r\ ,\ \forall k \in \{r, r+1, r+2, ...\}.$

   Remarque :

   On dit ici que N_r suit une loi binomiale négative de paramètres r et a et on note $N_r \to BN(r, a)$.

   La variable ici c'est le nombre de fois où l'on répète l'expérience jusqu'à l'obtention de r réalisations de notre évènement dont la probabilité est a.

   C'est à l'opposé d'une loi binomiale où la variable est égale au nombre de réalisations qu'on peut avoir pendant n expériences fixé.

3. $E(N_r) = \sum_{k=r}^{+\infty} kP(N_r = k) = \sum_{k=r}^{+\infty} kC_{k-1}^{r-1}(1-a)^{k-r}\, a^r = \frac{r}{a}$

   $V(N_r) = \frac{r(1-a)}{a^2}$

Correction Exercice 8.

1. $X(\Omega) = \{1, 2, 3, ..., n\}$

   $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

   $X \to B(n, p)$

   $E(X) = np$

   $V(X) = npq$

   a) $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, ..., n\}$ et $Z(\Omega) = \{1, 2, 3, ..., n\}$

   b) $p_0 = P(Z = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) = P(X = 0)\, P((Y = 0)/(X = 0)) = q^n q^n = q^{2n}$

   $p_1 = P(Z = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) + P((X = 1) \cap (Y = 0))$

   $= P(X = 0)\, P((Y = 1)/(X = 0)) + P(X = 1)\, P((Y = 0)/(X = 1))$

   $= q^n C_n^1 pq^{n-1} + C_1^n pq^{n-1} q^{n-1} = npq^{2n-1} + npq^{2n-2} = npq^{2n-2}(1 + q).$

   c) $P(Y = h/X = k) = C_{n-k}^h p^h (1-p)^{n-k-h}$ avec $h \in \{0, ..., n-k\}$ et $k \in \{0, ..., n\}$

d) $P(Z=s) = P(X+Y=s) = P((X=0)\cap(Y=s)) + ... + P((X=s)\cap(Y=0)) = \sum_{k=0}^{s} P((X=k)\cap(Y=s-k))$

e) $P(Z=s) = \sum_{k=0}^{s} P((X=k)\cap(Y=s-k)) = \sum_{k=0}^{s} P(X=k)\, P((Y=s-k)/(X=k))$
$= \sum_{k=0}^{s} C_n^k p^k q^{n-k} C_{n-k}^{s-k} p^{s-k} q^{n-s} = \sum_{k=0}^{s} C_n^k C_{n-k}^{s-k} p^s q^{2n-k-s}$

On vérifie que $C_n^k C_{n-k}^{s-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(s-k)!(n-s)!} = \frac{n!}{s!(n-s)!}\frac{s!}{k!(s-k)!} = C_n^s C_s^k$

$P(Z=s) = \sum_{k=0}^{s} C_n^s C_s^k p^s q^{2n-k-s} = C_n^s p^s q^{2n-2s} \sum_{k=0}^{s} C_s^k 1^k q^{s-k} = C_n^s p^s q^{2n-2s}(1+q)^s = C_n^s [p(1+q)]^s (q^2)^{n-s}$

f) $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$

$P(Z=s) = C_n^s (1-q^2)^s (q^2)^{n-s}$ avec $s \in \{0,1,...,n\}$

Donc Z suit la loi binomiale de paramètre n et $1-q^2$

$Z \to B(n, 1-q^2)$

Correction Exercice 9.

X suit une loi de Poisson de paramètre λ

$X \to P(\lambda) \Longrightarrow P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ pour $x \in \mathbb{N}$

Y sachant $X=n$ suit la loi binomiale de paramètres (n,p)

$Y\ /X=n \to B(n,p) \Longrightarrow P(Y=y/X=n) = C_n^y p^y (1-p)^{n-y}$ pour $y \in \{0,1,...,n\}$

Loi de Y :

$P((X=n)\cap(Y=y)) = P(X=n)\, P((Y=y)/(X=n)) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} C_n^y p^y (1-p)^{n-y} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{n!}{y!(n-y)!} p^y (1-p)^{n-y} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n p^y}{y!(n-y)!}(1-p)^{n-y}$

$\sum_{n=y}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y=y)) = \sum_{n=y}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n p^y}{y!(n-y)!}(1-p)^{n-y} = e^{-\lambda}\frac{p^y\lambda^y}{y!}\sum_{n=y}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-y}}{(n-y)!} = e^{-\lambda}\frac{p^y\lambda^y}{y!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} = e^{-\lambda}\frac{p^y\lambda^y}{y!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^y}{y!}$

$\Longrightarrow Y$ suit une loi de Poisson de paramètre λp ($Y \to P(\lambda p)$)

Loi de $X-Y$ sachant $Y=y$:

Soit $X-Y=l$.

$P(X-Y=l\ /\ Y=y) = \frac{P((X-Y=l)\ \cap\ (Y=y))}{P(Y=y)} = \frac{P((X=y+l)\ \cap\ (Y=y))}{P(Y=y)} = \frac{P(X=y+l)P((Y=y)/(X=y+l))}{P(Y=y)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{(y+l)}}{(y+l)!}C_{y+l}^y p^y(1-p)^l}{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^y}{y!}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{(y+l)}}{(y+l)!}\frac{(y+l)!}{y!l!}p^y(1-p)^l}{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^y}{y!}} = e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}$

$X-Y\ /\ Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$

$X-Y\ /\ Y \to P(\lambda(1-p))$

Correction Exercice 10.

1. f est une densité de probabilité si $f(x)\geq 0$, si f est continue, si $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$

   $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{-1}^{1}\lambda(1-t^2)\,dt = \frac{4}{3}\lambda$

   $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$

   Pour $\lambda = \frac{3}{4}$, $f(x)\geq 0$.

Donc $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}\left(1-x^2\right) & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$F_X(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$\forall x\leq -1,\ F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$

$\forall x\in[-1,1],\ F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1}0dt+\int_{-1}^{x}\frac{3}{4}\left(1-t^2\right)dt=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

$\forall x\geq -1,\ F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1}0dt+\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}\left(1-t^2\right)dt+\int_{1}^{+\infty}0dt=1$

$\Longrightarrow F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\leq -1\\ -\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1\\ 1 & \text{si} \quad \text{si } x\geq 1\end{cases}$

2. $P\left(|X|\geq\frac{1}{2}\right)=1-P\left(|X|<\frac{1}{2}\right)=1-P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)=1-\left(F_X(\frac{1}{2})-F_X(-\frac{1}{2})\right)=\frac{5}{16}$

   ou : $P\left(|X|\geq\frac{1}{2}\right)=P\left(X\geq\frac{1}{2}\right)+P\left(X\leq-\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f(t)dt+\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}f(t)dt=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{3}{4}\left(1-t^2\right)dt=\frac{5}{16}$

3. $E(X)=\int_{\mathbb{R}}tf(t)dt=\int_{-1}^{1}t\frac{3}{4}\left(1-t^2\right)dt=0$

   $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$

   $E(X^2)=\int_{\mathbb{R}}t^2f(t)dt=\int_{-1}^{1}t^2\frac{3}{4}\left(1-t^2\right)dt=\frac{1}{5}$

   $V(X)=\frac{1}{5}$

Correction Exercice 11.

1. $\int_R f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha}{(x-1)^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\alpha e^{-2x}dx=\frac{3}{2}\alpha$

   $\int_R f(x)dx=1\Longleftrightarrow\alpha=\frac{2}{3}$

   Pour $\alpha=\frac{2}{3}$, la fonction f est continue, positive et $\int_R f(x)dx$ donc pour $\alpha=\frac{2}{3}$, f est une densité de probabilité.

   Fonction de répartition:

   $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

   Si $x<0$:

   $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{2}{3(t-1)^2}dt=\frac{2}{3}\left[\frac{-1}{t-1}\right]_{-\infty}^{x}=\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{-2}{3(x-1)}$

   Si $x>0$:

   $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{3(t-1)^2}dt+\int_{0}^{x}\frac{2}{3}e^{-2t}dt=\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-2x}\right)=1-\frac{1}{3}e^{-2x}$

   D'où $F_X(x)=\begin{cases}\frac{-2}{3(x-1)} & \text{si} \quad x<0\\ 1-\frac{1}{3}e^{-2x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

2. $Y \in \{-1, 0, 1\}$

   $P(Y = -1) = P(X < 0) = F_X(0) = \frac{2}{3}$

   $P(Y = 0) = P(X = 0) = 0$ (car pour X une v.a.r continue et pour a quelconque $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(t)dt = 0$)

   $P(Y = 1) = P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

y	-1	0	1
$P(Y = y)$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

3. $E(Y) = \sum_{\{-1,0,1\}} yP(Y = y) = -\frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

   La v.a.r X n'est pas intégrable puisque son espérance est infinie

   En effet $\frac{2x}{3(x-1)^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{3x}$ et $\frac{2}{3x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $-\infty$.

4. $F_Z(z) = P(Z < z) = P(2X + 3 < z) = P(X < \frac{z-3}{2}) = F_X\left(\frac{z-3}{2}\right)$

   $f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(F_X\left(\frac{z-3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{z-3}{2}\right)$

   $$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{2}{3\left(\frac{z-3}{2}-1\right)^2} & si \quad \frac{z-3}{2} < 0 \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} e^{-2\left(\frac{z-3}{2}\right)} & si \quad \frac{z-3}{2} \geq 0 \end{cases}$$

   $$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{4}{3(z-5)^2} & si \quad z < 3 \\ \frac{1}{3} e^{-(z-3)} & si \quad z \geq 3 \end{cases}$$

Correction Exercice 12.

1. $U \to U_{([0,1])} \Longrightarrow f_U(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < u < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Soit $V = 1 - U$, déterminons la densité de la v.a V.

   $F_V(v) = P(V < v) = P(1 - U < v) = P(U > 1 - v) = 1 - P(U \leq 1 - v) = 1 - F_U(1 - v)$

   $f_V(v) = \frac{\partial F_V(v)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(1 - F_U(1 - v)) = f_U(1 - v) = f_U(u)$

   $f_V(v) = f_U(u) \Longrightarrow 1 - U$ suit aussi la même loi uniforme sur $[0, 1]$

2. $F_X(x) = P(X < x) = P\left(-\frac{\ln U}{\lambda} < x\right) = P(\ln U > -\lambda x) = P\left(U > e^{-\lambda x}\right) = 1 - P\left(U \leq e^{-\lambda x}\right) = 1 - F_U\left(e^{-\lambda x}\right)$

   $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - F_U\left(e^{-\lambda x}\right)\right) = \lambda e^{-\lambda x} f_U\left(e^{-\lambda x}\right)$

   $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad 0 < e^{-\lambda x} < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad -\lambda x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Comme $\lambda > 0$,

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la loi exponentielle de paramètre λ donc $X \to \xi(\lambda)$

Correction Exercice 13.

1. **a)** $\lambda = e^{\theta}$

   b) $E(X) = \theta + 1$

   $E(X^2) = \theta^2 + 2\theta + 2$

   $V(X) = 1$

   c) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \theta \\ 1 - e^{\theta - x} & \text{sinon} \quad x \geq \theta \end{cases}$

   $$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) $Y = \sqrt{X} > 0$

   Soit F_Y la fonction de répartition de Y et f_Y sa fonction de densité.

   $F_Y(y) = P(Y < y) = P(\sqrt{X} < y) = P(X < y^2) = F_X(y^2)$

   $f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}(F_Y(y)) = \frac{\partial}{\partial y}(F_X(y^2)) = 2y f_X(y^2) = \begin{cases} 2\alpha y e^{-\alpha y^2} & \text{si} \quad y^2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   $= \begin{cases} 2\alpha y e^{-\alpha y^2} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   b) $E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} 2\alpha y^2 e^{-\alpha y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$

   $E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} 2\alpha y^3 e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{\alpha}$

   $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \frac{4-\pi}{4\alpha}$

Correction Exercice 14.

X suit une loi normale de paramètres $m = 13$ et $\sigma = 0.1$

$X \to N(13\ ,\ 0.1)$

la variable centrée et réduite $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \to N(0\ ,\ 1)$

1. $P(13 \leq X \leq 13.2) = P\left(\frac{13-13}{0.1} \leq X^* \leq \frac{13.2-13}{0.1}\right) = P(0 \leq X^* \leq 2)$

   $= \phi(2) - \phi(0) = 0.4772$

2. $P(X > 13.25) = 1 - P(X \leq 13.25) = 1 - P(X^* \leq \frac{13.25-13}{0.1}) = 1 - P(X^* \leq 2.5) = 1 - \phi(2.5) = 0.0062$

3. $P(12.9 \leq X \leq 13.1) = P\left(\frac{12.9-13}{0.1} \leq X^* \leq \frac{13.1-13}{0.1}\right) = P(-1 \leq X^* \leq 1)$

   $= 2\phi(1) - 1 = 0.6827$

4. $P(12.8 \leq X \leq 13.1) = P\left(\frac{12.8-13}{0.1} \leq X^* \leq \frac{13.1-13}{0.1}\right) = P(-2 \leq X^* \leq 1)$
   $= \phi(1) - \phi(-2) = \phi(1) + \phi(2) - 1 = 0.8186$
5. $P(13.1 \leq X \leq 13.2) = P\left(\frac{13.1-13}{0.1} \leq X^* \leq \frac{13.2-13}{0.1}\right) = P(1 \leq X^* \leq 2)$
   $= \phi(2) - \phi(1) = 0.1359$

Correction Exercice 15.

$X \to N(0,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ \forall x \in \mathbb{R}$

1. $Y = |X| > 0$
   $F_Y(y) = P(Y < y) = P(|X| < y) = P(-y < X < y) = F_X(y) - F_X(-y) = 2F_X(y) - 1$
   $f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}(F_Y(y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2F_X(y) - 1) = 2f_X(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$
   D'où $f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{si} \quad y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   $E(Y) = \int_R y f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} y \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} (-y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$
   $= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[e^{-\frac{y^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$
2. $Z = X^2 > 0$
   $F_Z(z) = P(Z < z) = P(X^2 < z) = P(-\sqrt{z} < X < \sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}) = 2F_X(\sqrt{z}) - 1$
   $f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z}(F_Z(z)) = \frac{\partial}{\partial z}(2F_X(\sqrt{z}) - 1) = \frac{2}{2\sqrt{z}} f_X(\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}}$
   D'où $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} & \text{si} \quad z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Calcul de l'espérance de Z :
   Première méthode
   $E(Z) = \int_R z f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{z}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} dz = 1$
   En faisant le changement de variable $v = \frac{z}{2}$ et on aura dans ce cas $E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \sqrt{\pi} = 1$
   Deuxième méthode (plus simple)
   $E(Z) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 0 = 1$ car $X \to N(0,1)$