Corrigé : Espaces Probabilisés

Exercice 1

1. A.
2. $A \cap C \cap \overline{B}$.
3. $A \cap B \cap C$.
4. $A \cup B \cup C$.
5. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
6. $\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$.
7. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
8. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$.
9. $\overline{(A \cap B \cap C)} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

Exercice 2

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B})$.
2. $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \overline{A}_i) \geq 1 - \mathbb{P}(\overline{A}_1) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\overline{A}_i)$ (la première inégalité utilise $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$).

Exercice 3

1. Pour $i = 1, 2, 3$: U_i :="L'appareil choisi provient de l'usine n°i" ;
   E :="L'appareil passe l'essai".
   On a : $\mathbb{P}(U_1) = 3/12; \mathbb{P}(U_2) = 4/12; \mathbb{P}(U_3) = 5/12$;
   $\mathbb{P}(E|U_1) = 0.9; \mathbb{P}(E|U_2) = 0.8; \mathbb{P}(E|U_3) = 0.75$.
   Par la formule des probabilités totales :
   $\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(E|U_i)\mathbb{P}(U_i) = 0.804$
2. $\mathbb{P}(U_1|E) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{0.9*3/12}{0.804} = 0.28$.

Exercice 4

S :="être atteint du SIDA" ;
T :="le résultat du test est positif".
On a : $\mathbb{P}(T|S) = 0.99$; $\mathbb{P}(T|\overline{S}) = 0.05$; $\mathbb{P}(S) = 0.0001$.
On cherche $\mathbb{P}(S|T)$. Par Bayes :

$$\mathbb{P}(S|T) = \frac{\mathbb{P}(T|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(T|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(T|\overline{S})\mathbb{P}(\overline{S})} = 0.0019$$

$\mathbb{P}(S|T) << 0.99$. En fait, la proba d'erreur du test (0.05) est trop grande par rapport à celle d'être atteint du SIDA (0.0001).

Exercice 5
H :="Le client est un homme" ;
F :="Le client est une femme" ;
R :="Le client fait une réclamation cette année".
On a : $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(F) = 1/2$; $\mathbb{P}(R|H) = \alpha$; $\mathbb{P}(R|F) = \beta$.

1. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(R|F)\mathbb{P}(F) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2. R' :="Le client fait une réclamation l'année prochaîne". Par proba. tot. :

$$\mathbb{P}(R \cap R') = \mathbb{P}(R \cap R'|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(R \cap R'|F)\mathbb{P}(F).$$

   Or (par l'hypothèse d'indépendance conditionnelle) : $\mathbb{P}(R \cap R'|H) = \mathbb{P}(R|H)\mathbb{P}(R'|H) = \alpha^2$, et $\mathbb{P}(R \cap R'|F) = \mathbb{P}(R|F)\mathbb{P}(R'|F) = \beta^2$.
   Ainsi $\mathbb{P}(R \cap R') = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$.

3. $$\mathbb{P}(F|R) = \frac{\mathbb{P}(R \cap F)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\beta/2}{(\alpha+\beta)/2} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Exercice 6
A :="Tomber sur le répondeur".
B :="X est présent".
On a : $\mathbb{P}(A) = 0.9$; $\mathbb{P}(A|B) = 2/3$; $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = 1$.

1. On cherche $\mathbb{P}(B)$.
   Par formule des proba. tot. :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) \\ &= \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})(1 - \mathbb{P}(\overline{B})) \\ &= \mathbb{P}(B)\left(\mathbb{P}(A|B) - \mathbb{P}(A|\overline{B})\right) + \mathbb{P}(A|\overline{B}).\end{aligned}$$

   D'où : $P(B) = 0.3$.

2. On cherche $\mathbb{P}(B|A)$. Par Bayes :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})} = 2/9.$$