Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis | **1 Mars 2016**
Année Universitaire 2015/2016 | **Durée 2h00**
Documents non autorisés | **Nombre de pages : 2+Table**

Examen de Probabilités et Statistiques

NB :
La rédaction et la clarté des résultats seront prises en compte.

Exercice 1 (6.5 points)
Soit X la variable aléatoire qui correspond au résultat du lancer d'une pièce de monnaie équilibrée. La variable aléatoire X prendra la valeur 1 si on obtient "pile" et la valeur 0 si on obtient "face".

1. Identifier la loi de X puis montrer que $\mathbb{E}(X) = 0.5$ et $\mathbb{V}(X) = 0.25$.
2. On considère n lancers indépendants d'une même pièce de monnaie équilibrée et on note par X_i la variable aléatoire qui correspond au résultat du lancer numéro i. Soit $\overline{X}_n$ la proportion de "pile" obtenue sur un total de n lancers :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   (a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$ puis la variance $\mathbb{V}(\overline{X}_n)$ en fonction de n.
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - 0.5| \leq 0.1) \geq 0.9$$

      i. en utilisant l'inégalité de **Bienaymé-Tchébychev**.
      ii. en utilisant le **Théorème Central-Limite**.

Exercice 2 (3 points)
On rappelle que la fonction Gamma est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ et $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \geq 1$.
La durée de fonctionnement, exprimée en jours, d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta\, x^2\, e^{-\alpha x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel strictement positif.

1. Déterminer le paramètre β en fonction de α,
2. En supposant qu'un tel composant fonctionne en moyenne pendant 200 jours, calculer α.
3. Déterminer une densité de probabilité de la variable $Y = \sqrt{X}$.

Exercice 3 (6 points)
Soit $(X,\, Y)$ un vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X,\,Y)}(x,\, y) \;=\; cy(1-x)\; \mathbb{1}_{[0,\,1]^2}(x,\, y)$$

1. Déterminer la constante c.
2. Calculer les densités marginales de X et de Y puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Calculer $cov(X, Y)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \leq \frac{2}{3})$ et $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

Exercice 4 (5 points)
Dans une entreprise 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables.
Soient les événements A : "Accepter un article", D : "Article défectueux" et E : "Erreur de contrôle".

1. Exprimer l'événement E en fonction des événements A, D, $\overline{A}$ et $\overline{D}$.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
3. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?