ENIT-ENSTA 1A 2014–2015 (Juin 2015)

Examen (Session Principale) : **Probabilités et Statistiques (MA101)**
Durée : **3 H - Documents interdits**
Nombre de pages : **2**

Exercice 1.
On rappelle la densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

Les résultats numériques sont à exprimer en fonction de la fonction de répartition ϕ *de la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$*.*

Dans une usine alimentaire, le remplissage de paquets de riz subit quelques erreurs inévitables. La loi exige de l'usine de remplir en moyenne 1000 grammes par paquet, avec un écart-type de 10 grammes.
Lors d'un contrôle dans cette usine, l'inspecteur a pris au hasard 64 paquets de riz, et a constaté que la moyenne $\overline{X}_{64}$ de leurs poids ($\frac{1}{64}\times$ la somme des 64 poids) vaut 995 grammes. Bien que la différence constatée soit ainsi seulement de 5 g, il décide quand-même de punir l'usine par une amende !

1. L'inspecteur a-t-il raison ? (Utiliser le Théorème Central-Limite (TCL) pour approcher $\mathbb{P}(\overline{X}_{64} \leq 995)$).

On veut instaurer une procédure de décision automatique pour éviter les conflits. Le contrôle se fait seulement sur la moyenne μ du poids. Lors de sa visite, tout inspecteur doit contrôler n paquets de poids respectifs $X_1, \ldots, X_n$, supposés i.i.d. de loi normale de moyenne μ et d'écart-type 10 g ($\mathcal{N}(\mu, 100)$).

2. Quel est l'estimateur par méthode des moments de μ ?
3. Calculer l'estimateur par maximum de vraisemblance de μ.
4. Montrer que cet estimateur est optimal.
5. Construire un test d'hypothèses pour donner raison (avec risque d'erreur α donné) à un inspecteur postulant H_1 :="Le poids moyen d'un paquet de riz dans l'usine est plus petit que 1000 g", contre l'usine postulant H_0 :="Le poids moyen d'un paquet vaut 1000 g".
6. Si l'écart-type était inconnu aussi, quel test proposeriez-vous (sans démonstration) pour accepter H_1 au seuil α ?

Exercice 2.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et bornée par $\| g \|_\infty$ (connue). Pour $a < b$ réels, on considère

$$I := \int_a^b g(x)dx.$$

On ne sait pas calculer I en général, alors on cherche à l'approcher.

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[a, b]$. Déterminer la limite presque sûre (quand $n \to \infty$) de $\overline{G}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$.
2. Utiliser le Théorème Central-Limite (TCL) pour déterminer un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ (α un seuil petit) pour la valeur de l'intégrale I, en fonction de $\overline{G}_n$, n, a, b et $\| g \|_\infty$.
3. Comment faire pour approcher de la même façon

$$I_\infty := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx?$$

Exercice 3.

1. Soient A et B tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.
2. En déduire que, si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} Y$, alors $\varphi(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \varphi(X, Y)$, pour toute fonction continue $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
3. Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires non nulles et i.i.d. , d'espérance m et de variance σ^2. Montrer que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{X_1^2+\cdots+X_n^2}$ converge presque sûrement, quand $n \to +\infty$, vers une limite à déterminer.

Exercice 4.

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit

$$\begin{cases} X & := \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V); \\ Y & := \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V). \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de $R := \sqrt{-2\ln(U)}$ et de $\Theta := 2\pi V$.
2. Déterminer la loi du couple $(X, Y) = (R\cos(\Theta), R\sin(\Theta))$.
3. En déduire les lois marginales de X et de Y.

Exercice 5.

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$Z_n := \prod_{i=0}^n X_i.$$

Montrer que les variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes.