

**Examen de Probabilités**  
**Session principale**

Nombre de Pages : 1 (+ table de la loi normale)

**Exercice 1.** (4 points)

Dans une usine, trois machines  $A, B$  et  $C$  fabriquent respectivement 40%, 30% et 30% des pièces. Les proportions de pièces défectueuses fabriquées respectivement par les machines  $A, B$  et  $C$  sont de 2%, 4% et 5%.

On choisit une pièce au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse.
2. Sachant qu'elle est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'usine  $A$ .

**Exercice 2.** (4 points)

La variable aléatoire  $X$  désignant le poids d'une carotte de potager suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  (de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ ). Sur une récolte de 400 carottes, 250 font moins de 20g, et 380 font plus de 12g.

1. Déterminer  $m$  et  $\sigma$ .
2. Évaluer le pourcentage de carottes pesant plus de 18g.
3. On arrache une carotte au hasard. Sachant qu'elle pèse plus de 15g, calculer la probabilité qu'elle pèse moins de 18g.

**Exercice 3.** (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathbb{I}_{\{x>0\}}$$

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire continue de densité  $f$ . Calculer la probabilité  $\mathbb{P}(X > 1)$ .
3. Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  de  $X$ .
4. Soit  $Y = X^2$ . Déterminer la densité de  $Y$ .
5. Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(Y)$  et la variance  $\mathbb{V}(Y)$  de  $Y$ .

**Exercice 4.** (6 points)

Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire de densité jointe

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} Cxye^{-x^2-y^2}, & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer  $C$ .
2. Déterminer les densités marginales  $f_X(x)$  et  $f_Y(y)$ .
3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
4. Déterminer la densité de la variable aléatoire  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .