Corrigé : Exam. Princip. Proba - TA - Juin 2015

Exercice 1

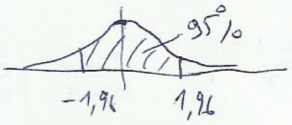
1) Soit $X :=$ poids d'un paquet ; $\overline{X}_{64} = \frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64} X_i$ ↘ iid, $\sim X$

$\mathbb{E}(\overline{X}_{64}) = \mathbb{E}(X) = 1000$

$\mathbb{V}(\overline{X}_{64}) = \frac{\mathbb{V}(X)}{64} = \frac{100}{64}$

$$\mathbb{P}(\overline{X}_{64} \leq 995) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_{64} - 1000}{\sqrt{\frac{100}{64}}} \leq \underbrace{\frac{995-1000}{\sqrt{\frac{100}{64}}}}_{=-4}\right)$$

$$\overset{(TCL)}{\simeq} \Phi(-4) : \text{très petite } \left(\ll 2{,}5\% \text{ car } \Phi(-1{,}96) = 2{,}5\% \right)$$



$\Rightarrow$ "normalement", $\overline{X}_{64}$ devrait être > 995. Or l'inspecteur constate que $\overline{X}_{64} = 995 \Rightarrow$ il a raison de punir l'usine.

2) $\hat{\mu}_n^{EMM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n$.

3) $\mathcal{L}(\mu, \underset{10}{\underset{\parallel}{\sigma}} ; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{200}\right)$

$\Rightarrow \log \mathcal{L} = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{200} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\mu}\log\mathcal{L} = \cancel{\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i-\mu}{100}$

$\frac{\partial}{\partial\mu}\log\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow \hat{\mu}_n^{EMV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n$.

3) $I_n(\mu) = \mathbb{V}ar\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\log\mathcal{L}\right) = \mathbb{V}ar\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right) = \frac{1}{(100)^2}\cdot n\,\mathbb{V}(X_1)$

$= \frac{1}{(100)^2} n \cdot 100 = \frac{n}{100} = \frac{1}{\frac{100}{n}} = \frac{1}{\mathbb{V}ar(\hat{\mu}_n^{EMV})}$

$\Rightarrow \hat{\mu}_n^{EMV}$ optimal (atteint borne FDCR).

5) H_1 : " $\mu < 1000$ " contre H_0 : " $\mu = 1000$ ".

$\rightsquigarrow$ Région de confiance : $\left\{ \overline{X}_n < 1000 - \varepsilon . \frac{10}{\sqrt{n}} \right\}$; $\varepsilon = ?$

$\alpha = \mathbb{P}$ (erreur de $1^{ère}$ espèce ") $= \sup_{H_0} \mathbb{P}$ (décider H_1)

$= \sup_{\mu = 1000} \mathbb{P}\left(\overline{X}_n < 1000 - \varepsilon . \frac{10}{\sqrt{n}} \right)$

$= \sup_{\mu = 1000} \phi\left(\dfrac{\left(1000 - \varepsilon \frac{10}{\sqrt{n}}\right) - \mu}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \right)$, car $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{100}{n}\right)$

$= \phi(-\varepsilon) = 1 - \phi(\varepsilon)$. $\Longrightarrow$ $\varepsilon = \phi^{-1}(1-\alpha)$.

6) Au lieu de $\sigma^2 = 10^2$, on a σ^2 inconnu.

$\Rightarrow$ on peut le remplacer par son estimateur sans biais :

$S_n'^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$.

Un estimateur (biaisé !) de σ est S_n'.

Région du test : $\left(\overline{X}_n < 1000 - \varepsilon \frac{S_n'}{\sqrt{n}} \right)$, puis il faut déterminer ε en fonction de α. C'est un test de Student. (basé sur le fait que $\frac{(n-1) S_n'^2}{\sigma^2}$ suit la loi de Student $St(n-1)$).

Exercice 2.

1) (X_i) iid $\Rightarrow$ $(g(X_i))$ iid $\xRightarrow{\text{LGN (+g bornée)}}$ $\overline{G}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \xrightarrow[n\infty]{p.s} \mathbb{E}(g(X_1))$

Or : $\mathbb{E}(g(X_1)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \underbrace{f_{X_1}(x)}_{\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$.

$\Rightarrow$ $\overline{G}_n \xrightarrow[n\infty]{p.s} \frac{1}{b-a} I$.

2) On cherche un intervalle de confiance pour I de la forme $\left[(b-a)\overline{G}_n \pm \varepsilon . \sqrt{\mathbb{V}ar((b-a)\overline{G}_n)}\right] := \mathcal{J}_n$

(✱) $\mathbb{V}ar((b-a)\overline{G}_n) = (b-a)^2\, \mathbb{V}ar(\overline{G}_n)$

$= (b-a)^2 . \dfrac{\mathbb{V}ar(g(X_1))}{n}$

Or : $\mathbb{V}ar(g(X_1)) = \mathbb{E}[(g(X_1))^2] - (\mathbb{E}(g(X_1)))^2 \leq \mathbb{E}[(g(X_1))^2] \leq \|g\|_\infty^2$

$\Rightarrow \mathcal{J}_n \subseteq \left[(b-a)\overline{G}_n \pm \varepsilon \|g\|_\infty\right]$.

(✱✱) Pour avoir un intervalle de conf. de niveau $(1-\alpha)$, il suffit que : $\mathbb{P}(I \in \mathcal{J}_n) = 1-\alpha$. Donc :

$1-\alpha = \mathbb{P}\left((b-a)\overline{G}_n - \varepsilon \cancel{\|g\|_\infty} \sqrt{\mathbb{V}((b-a)\overline{G}_n)} \leq I \leq (b-a)\overline{G}_n + \varepsilon \cancel{\|g\|_\infty} \sqrt{\mathbb{V}ar((b-a)\overline{G}_n)}\right)$

$= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{b-a}\left(I - \varepsilon \cancel{\frac{(b-a)}{\sqrt{n}}} \sqrt{\mathbb{V}((b-a)\overline{G}_n)}\right) \leq \overline{G}_n \leq \frac{1}{b-a}\left(I + \varepsilon\sqrt{\mathbb{V}ar((b-a)\overline{G}_n)}\right)\right\}$

$(\mathbb{E}(\overline{G}_n) = \frac{1}{b-a} I)$

$= \mathbb{P}\left\{-\frac{\varepsilon}{\cancel{\|g\|_\infty}} \leq \frac{\overline{G}_n - \mathbb{E}(\overline{G}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{G}_n)}} \leq \varepsilon\right\}$

(TCL)

$\simeq \phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon) = 2\phi(\varepsilon) - 1$.

On veut alors : $2\phi(\varepsilon) - 1 = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow \phi(\varepsilon) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \varepsilon = \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$.

<u>Concl. de (✱) et (✱✱)</u> : Un intervalle de conf. de niveau $\geqslant (1-\alpha)$ pour I est :

$$\left[(b-a)\overline{G}_n \pm \phi^{-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}) . \|g\|_\infty\right].$$

3) $I_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{g(\tan y)}{1+\tan^2 y}\,dy$

$x = \tan(y)$

$\Rightarrow$ on se ramène à $\tilde{I}_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \tilde{g}(y)\,dy$.

Exercice 3

1) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$

$= 2 - \underbrace{\mathbb{P}(A \cup B)}_{\leq 1} \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1.$

2) $A := \{\omega \in \Omega \text{ tq } X_n(\omega) \xrightarrow[n\infty]{} X(\omega)\}$,

$B := \{ \text{———} \; Y_n(\omega) \xrightarrow[n\infty]{} Y(\omega)\}$.

On a (par hypothèse) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$.

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\left((X_n, Y_n) \xrightarrow[n\infty]{p.s.} (X,Y)\right) = 1$

$\overset{\varphi \text{ cont}}{\Rightarrow} \mathbb{P}\left(\varphi(X_n, Y_n) \longrightarrow \varphi(X,Y)\right) = 1$.

3) $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow[n\infty]{p.s} \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\mathbb{E}(X_1^2)}$ (LGN ⊕ (2))

$= \frac{m}{\sigma^2 + m^2}$.

Exercice 4

1) Soit g bornée mesurable.

*) $\mathbb{E}(g(R)) = \mathbb{E}\left(g\left(\sqrt{-2\ln U}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}} g\left(\sqrt{-2\ln u}\right) \underbrace{f_U(u)}_{\mathbb{1}_{[0,1]}(u)} du$

$= \int_0^1 g\left(\sqrt{-2\ln u}\right) du \underset{r := \sqrt{-2\ln u}}{=} \int_0^{+\infty} g(r)\, r e^{-\frac{r^2}{2}} dr$

$\Rightarrow f_R(r) = r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r).$

**) $\mathbb{E}(g(\Theta)) = \mathbb{E}(g(2\pi V)) = \int_0^1 g(2\pi v)\, dv \underset{\theta := 2\pi v}{=} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$

$\Rightarrow f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\theta)$ ($\sim$ Uniforme sur $[0, 2\pi]$)

2) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée mesurable.

$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \mathbb{E}[h(R\cos\Theta, R\sin(\Theta))]$

$= \iint h(r\cos\theta, r\sin\theta) \underbrace{f_{(R,\Theta)}(r,\theta)}_{= f_R(r) f_\Theta(\theta) \text{ par indep de } U,V.} dr\, d\theta$

$= \iint h(r\cos\theta, r\sin\theta) \frac{r e^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r) \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\theta)\, dr\, d\theta.$

On pose le changement classique de coordonnées cartésiens $\leftrightarrow$ polaires :
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, et on a $dx\,dy \leftrightarrow r\,dr\,d\theta$! (ou Jacob...) Ainsi :

$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}}{2\pi} dx\, dy.$

Concl. $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

3) $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(0,1)$. De m̂ pour Y (et sont indep).

Exercice 5.

$Z_n \in \{-1, +1\}$.

(*) Soient $n_1 < n_2, \dots < n_p \in \mathbb{N}$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \{-1, +1\}$.

$$\mathbb{P}\left(Z_{n_1} = \alpha_1 ; \dots ; Z_{n_p} = \alpha_p\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\prod_{i=0}^{n_1} X_i = \alpha_1 ; \dots\dots ; \prod_{i=0}^{n_p} X_i = \alpha_p\right)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\underbrace{\prod_{i=0}^{n_1} X_i = \alpha_1} ; \underbrace{\prod_{i=n_1+1}^{n_2} X_i = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} ; \dots\dots ; \underbrace{\prod_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} X_i = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}}}}_{\text{indep}}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\left(\prod_{i=0}^{n_1} X_i = \alpha_1\right) \cdot \mathbb{P}\Big(\underbrace{\prod_{i=n_1+1}^{n_2} X_i}_{\text{de m̂ loi que } Z_{n_2-n_1-1}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big) \cdots\cdots \mathbb{P}\Big(\underbrace{\prod_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} X_i}_{\text{m̂ loi que } Z_{n_p-n_{p-1}-1}} = \frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}}\Big)$$

$$= \prod_{k=1}^{p} \mathbb{P}\left(Z_{n_k - n_{k-1} - 1} = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}\right).$$

(**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \{-1, 1\}$. Mq $\mathbb{P}(Z_n = \alpha) = \frac{1}{2}$.

$$\mathbb{P}(Z_n = \alpha) = \mathbb{P}\left(\prod_{i=0}^{n} X_i = \alpha\right) =$$

$$\overset{\text{proba. tot.}}{=} \mathbb{P}\left(\prod_{i=0}^{n} X_i = \alpha ; X_n = -1\right) + \mathbb{P}\left(\prod_{i=0}^{n} X_i = \alpha ; X_n = +1\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\prod_{i=0}^{n-1} X_i = -\alpha\right) \underbrace{\mathbb{P}(X_n = -1)}_{1/2} + \mathbb{P}\left(\prod_{i=0}^{n-1} X_i = \alpha\right) \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 1)}_{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\mathbb{P}(\cancel{\Pi X_i}\, Z_{n-1} = -\alpha) + \mathbb{P}(Z_{n-1} = \alpha)}_{= 1 \ (\text{car } \alpha \in \{-1, 1\}, \text{ et } Z \in \{-1, 1\})}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Concl (*) et (**) : $\mathbb{P}(Z_n = \alpha_1, \dots, Z_{n_p} = \alpha_p) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^p$

$= \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z_n = \alpha_1) \times \dots \times \mathbb{P}(Z_{n_p} = \alpha_p)$. D'où les (Z_n) indep.