ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS

MATHEMATIQUES POUR INGENIEUR 1

Série d'exercices n°3 Année Universitaire 2013/2014

Exercice 1 —

1. Soit $0 < \epsilon < 1/2$. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\epsilon(t) = \dfrac{1}{1+\epsilon\sin(t)+t^2}$ est intégrable.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(t)dt$.

Exercice 2 —
Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_t(x) = \dfrac{e^{itx}}{1+x^2}\psi(tx)$.

1. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, f_t est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx$.

Exercice 3 —

1. Soit la fonction de la variable réelle t définie par $f_1(t) = 1-t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $f_1(t) = 0$ pour $t < 0$ ou $t > 1$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}_1(u)$ de cette fonction.

   Le résultat satisfait-il aux conclusions du théorème de Riemann-Lebesgue?
2. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f_2(t) = 1 + t$ pour $-1 \leq t \leq 0$ et $f_2(t) = 0$ pour $t < -1$ ou $t > 0$.
3. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $f = f_1 + f_2$? Qu'en est-il du comportement pour $|u| \to \infty$ de $\hat{f}$ comparé à celui des fonctions $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$?

Exercice 4 —

1. Soient les fonctions de la variables réelle x définie pour $m \in \mathbb{N}$ par $x \mapsto f_m(x) = |x|^m e^{-\pi x^2}$. Démontrer que les f_m sont des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre $\mathcal{E}$ satisfaite par la fonction $x \mapsto f_0(x) = e^{-\pi x^2}$.
3. Donner la raison pour laquelle la fonction f_0 admet une transformée de Fourier $\hat{f}$ et montrer que $\hat{f}$ satisfait aussi à l'équation différentielle $\mathcal{E}$.
4. Déterminer la solution générale de $\mathcal{E}$ et en déduire l'expression de $\hat{f}$. (On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$).

Exercice 5 —
On pose $P_a(x) = \dfrac{a}{\pi}\dfrac{1}{x^2+a^2}$, où $a > 0$.

1. Démontrer que $(\mathcal{F}(P_a \star P_b)(u) = (\mathcal{F}(P_{a+b}))(u)$.
2. En déduire l'expression de $P_a \star P_b$.
3. La fonction $xP_a(x)$ possède-t-elle une transformée de Fourier? Comment cela se traduit-il au niveau de la transformée de Fourier $\mathcal{F}P_a$?

Exercice 6 —
Soit f la fonction définie par $f(t) = e^t \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t)$. Soit (E) l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = f(t)\,.$$

Déterminer, en utilisant la transformation de Fourier, la solution de (E) dans $L^1(\mathbb{R})$ vérifiant y et $y' \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 7 —
Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ les équations intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}} y(t)y(x-t)\,dt = e^{-x^2} \quad \text{et} \quad \int_R \frac{y(t)}{(x-t)^2+\beta^2}\,dt = \frac{1}{x^2+\alpha^2}, \quad \text{où} \quad 0 < \beta < \alpha.$$