ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS

MATHEMATIQUES 1

Série d'exercices n°2 — Année Universitaire 2013/2014

Exercice 1 — On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

1) Montrer que F est bien définie, paire et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(0)$.
2) Montrer que G est bien définie, paire, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G'' = F$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(0) - F(x) + G(x) = C \times |x| \text{ où } C = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(y)}{y^2}\, dy.$$

4) Déduire que $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ et qu'elle vérifie $F'' = F$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$. En déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 — Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.
1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
3) En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$ et donner $F(x)$ pour $x \leq 0$.
4) Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 dt = \pi \ln 2$.

Exercice 3 — On considère la convergence, quand $\epsilon \to 0$ ($\epsilon > 0$), des intégrales

$$I_\epsilon = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2/\epsilon}}{|x-1|^{1/2}} dx \text{ et } J_\epsilon = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{|x-\epsilon|^{1/2}} dx.$$

1) Calculer la limite de I_ϵ.
2) Peut-on appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à J_ϵ?
3) Conclure en utilisant le changement de variables $y = x - \epsilon$.

Exercice 4 — On définit la fonction $F : \mathbb{R}^+ \mapsto \overline{\mathbb{R}^+}$ de la manière suivante :

$$x \geq 0,\ F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} \ln(e + xt)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

1) Montrer que $F(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$.
2) Calculer $F(0)$ (On pourra commencer par calculer $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+t^2)} dudt$, puis on déduit $F(0)$ en utilisant le théorème de Fubini.).
3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
5) Trouver la limite de F en $+\infty$.

Exercice 5 —
1) Calculer $\frac{d}{dy}\frac{y}{x^2+y^2}$ et en déduire que $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy\right) dx = \frac{\pi}{4}$.
2) Déduire de la question précédente que la fonction $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ n'est pas intégrable sur $[0, 1] \times [0, 1]$ puis montrer ce résultat directement.
3) Retrouver le résultat de non-intégrabilité de F en appliquant le changement de variables $x = rcos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

Exercice 6 — Soit F définie sur son domaine de définition (noté D_F) par $F(x) = \int_{]0,+\infty[} \sin(t) e^{-tx} dt$.
1) Donner le domaine de définition de F, D_F.
2) Montrer que F est continue et dérivable sur D_F.
3) Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Fubini pour calculer

$$\int_{]0,a]\times]0,+\infty[} \sin(t) e^{-tx} dtdx\ , \quad (a > 0)$$

4) En appliquant le théorème de Fubini, et en utilisant le fait qu'une primitive de $t \mapsto f(t, x)$ est $-\frac{1}{1+x^2}(x \sin(t) + \cos(t))\, e^{-tx}$, montrer que

$$\int_{]0,a]} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2} \left[1 - e^{-ax}(x \sin(a) + \cos(a))\right] dx.$$

5) En considérant une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tendant vers $+\infty$, appliquer le théorème de la convergence dominée pour déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2} \left(1 - e^{-a_n x}(x \sin(a_n) + \cos(a_n))\right) dx.$$

6) En déduire la limite : $\lim_{a\to+\infty} \int_{]0,a]} \frac{\sin t}{t}\, dt$.
7) Montrer que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}, \forall k \geq 0$. Déduire que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.