ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS

Mathématiques pour l'ingénieur

Série d'exercices n°1 Année Universitaire 2012/2013

Exercice 1 — Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère les quantités suivantes:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|\,.$$

1. (a) Montrer que les application $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\forall f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.
2. (a) Déterminer une suite (f_n) de E telle que:
   $$\|f_n\|_\infty \to +\infty \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\,.$$
   (b) Existe-t-il une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq A\,\|f\|_1\,?$$
3. (a) Déterminer une suite (f_n) de E telle que:
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \|f_n\|_1 = 1\,, \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 \to +\infty \,\text{quand}\, n \to +\infty\,.$$
   (b) Existe-t-il une constante $B \in \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall f \in E, \quad \|f\|_2 \leq B\,\|f\|_1\,?$$
4. (a) Déterminer une suite (f_n) de E telle que $(\|f_n\|_2)$ soit bornée, et $\|f_n\|_\infty \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
   (b) Existe-t-il une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq B\,\|f\|_2\,?$$
5. L'espace E est-t-il complet pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 2 — Soit E un espace vectoriel complet et soit f une âpplication de E de E telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \; \forall x, y \in E \tag{1}$$

pour un réel $k \in [0, 1[$. On dit que f est contractante.

1. Soit $x_0 \in E$ et (x_n) la suite de E définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

et en déduire que la suite (x_n) est de Cauchy.

2. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$. On dit que x est un point fixe de l'application f.

3. Démontrer que ce point fixe est unique.

4. Montrer que ces résultats (existence et unicité du point fixe) restent vrais si l'on remplace la condition (1) par la condition suivante, pour un entier $N \geq 1$:

$$\|f^N(x) - f^N(y)\| \leq k \|x - y\| \; \forall x, y \in E$$

Exercice 3 — Soit E un espace vectoriel normé complet et $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur linéaire continu sur E. On suppose que $\|A\| < 1$.

1. Soit $x \in E$ et $(y_N)_{N \in \mathbb{N}}$ la suite de E définie par $y_N = \sum_{n=0}^{N} A^n x$. Montrer que la suite y_N converge dans E. On note y la limite.
Soit T l'opérateur qui à tout x de E associe l'élément y ainsi construit.

2. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$, que T commute avec A et que:

$$T(I - A) = (I - A)T = I$$

où I désigne l'opérateur identité de E.

Exercice 4 — l^1 est l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum |u| < \infty$, muni de la norme $\|u\|_1 = \sum |u|$ et l^∞ est l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_n |u|$.

1. Pour une suite $(k_n) \in l^\infty$, montrer que l'application $\Phi_k : u_i n l^1 \mapsto \sum k_n u_n$ est une forme linéaire continue et que $\|\Phi_k\| = \|k\|_\infty$.

2. Montrer que l'application $\Phi : k \in l^\infty \mapsto \Phi_k \in (l^1)'$ est une isométrie bijective et conclure.