Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Examen - Mathématiques II - 1ère année - Date : 14 mai 2012 - Durée :1h30

Enseignants : A. Ben Abda - H. Bouhafa - M. Jebalia - R. Laroussi et M. Mahjoub

Documents non autorisés

Exercice 1

Soit $H = L^2([0,1])$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable. On munit H du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

et de la norme associée à ce produit scalaire. Soit a un réel positif strictement inférieur à 1 et soit p un réel positif.

On considère la fonction F définie de H dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(f) = \int_0^a t^p f(t)dt.$$

1) Montrer que F est une forme linéaire continue.

2) Calculer la norme de F.

3) Montrer qu'il existe une fonction unique $g \in H$ dont on donnera l'expression telle que :

$$F(f) = \langle f, g\rangle, \forall f \in H.$$

4) Dans la suite, on remplace H par l'ensemble $E = \mathcal{C}([0,1])$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et on garde le même produit scalaire et la même expression de la fonction F définis plus haut. L'espace E est muni de la norme associée au produit scalaire.

a) Montrer que F est une forme linéaire continue de E dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il n'existe pas une fonction $h \in E$ telle que $F(f) = \langle f, h\rangle, \forall f \in E$.

Indication : on rappelle que $\mathcal{C}([0,1])$ est dense dans $L^2([0,1])$.

Exercice 2

On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $\mathbb{R}$.

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x).$$

2) Soit α un réel tel que $-2 < \alpha < -1$, montrer que :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha \varphi(x)dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon,$$

où A dépend de φ , mais ne dépend pas de ε et $R_\varepsilon$tend vers une limite finie quand ε tend vers 0 .

Indication : utiliser la question 1) et le fait que le support de φ est un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans un intervalle $[-R, R]$, où $R > 0$, ce qui permet de ramener l'intégrale de $x^\alpha\varphi(x)$ sur $[\varepsilon, +\infty]$ à une intégrale sur $[\varepsilon, R]$.

3) a) Donner l'expression de la limte de R_ε quand ε tend vers 0.

b) On pose, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon$.

Montrer que T est une distribution.