ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS

EXAMEN DE MATHEMATIQUES 1
(Session de rattrapage)

1$^{\text{ère}}$ Année — Année Universitaire 2011/2012

Enseignants :
A. Ben Abda, H. Bouhafa, M. Jebalia, R. Laroussi et M. Mahjoub

Durée : 1h30 — **Documents interdits**

N.B. : L'examen comporte 1 pages

Exercice 1 —

1. Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^1 nxe^{-nx}dx$ de deux façons différentes.
2. Soit $a > 0$ et soit g_a définie par $g_a(x) = x^{-a}\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}$.
   a) Montrer que $g_a \in L^p(\mathbb{R})$ si $p > \frac{1}{a}$ et que $g_a \notin L^p(\mathbb{R})$ si $p \leq \frac{1}{a}$.
   b) Soit $q > 0$ tel que $q > p$. Montrer que si $g_a \in L^p(\mathbb{R})$ alors $g_a \in L^q(\mathbb{R})$.

Exercice 2 —

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{n\sqrt{x}+1}\cos x$. Montrer que f_n appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que la suite $a_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)dx$ converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx$ où $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. On donnera une expression explicite de f sans chercher à calculer $\lim a_n$.

Exercice 3 — On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et démontrer que
$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$
3. En intégrant F' sur $]0, +\infty[$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.