ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS

EXAMEN DE MATHEMATIQUES 2

$1^{\text{ère}}$ Année | Année Universitaire 2011/2012

Enseignants :
A. Ben Abda, H. Bouhafa, M. Jebalia, R. Laroussi et M. Mahjoub

Durée : 1h30 | **Documents interdits**

N.B. : L'examen comporte 2 pages

Exercice 1 —

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathbb{R}$? Si oui, en donner une expression simple.
   $< T_1, \varphi >= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)dx;$
   $< T_2, \varphi >= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}dx;$
   $< T_3, \varphi >= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)|\cos x|dx.$
2. Calculer les dérivées succesives de T_3.

Exercice 2 —

1. Vérifier que $vp(\frac{1}{x})$ définie par
   $$< vp(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$
   est un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la dérivée au sens des distributions de $vp(\frac{1}{x})$ est donnée par
   $$< (vp(\frac{1}{x}))', \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} -\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}dx$$
   pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On note $Pf(\frac{1}{x^2}) = -(vp(\frac{1}{x}))'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Calculer $xvp(\frac{1}{x})$ et $x^2 Pf(\frac{1}{x^2})$.

Exercice 3 — Calculer la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 |t^2 - at - b|^2 dt\,.$$

(**Indication :** Utiliser la notion de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert.)

Exercice 4 — Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_k(x) = k^n f(kx)$.

1. Montrer qu'on peut définir une distribution T_k associée à la fonction f_k.
2. Montrer que, $\forall \eta > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a:

$$< T_k, \varphi > -\varphi(0) = \int_{||x||\leq\eta} (\varphi(x)-\varphi(0)) f_k(x)dx + \int_{||x||>\eta} (\varphi(x)-\varphi(0)) f_k(x)dx\,.$$

3. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{||x||\leq\eta} |\varphi(x)-\varphi(0)| f_k(x)dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \int_{||x||>\eta} |\varphi(x)-\varphi(0)| f_k(x)dx\,.$$

4. Déterminer alors $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.