Ex2 : 1) $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{n e^{-x}}{n\sqrt{x} + 1} \cos(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow f_n \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ et $e^{-x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$

$\Rightarrow f_n \in L^1(\mathbb{R}_+)$ (puisque f_n et e^{-x} sont positives)

2) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} & \forall x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ pp $x \in \mathbb{R}_+$

D'autre part, $|f_n(x)| = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}} \leq \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ $\forall x > 0$

$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ pp $x \in \mathbb{R}_+$

On pose $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

On a $g \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $g \underset{+\infty}{=} o(e^{-x}) \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}_+)$

D'après le T.C.D $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Ex3 : $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$

1) on a $\forall x \geq 0$ $\quad \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \in L^1([0,+\infty[)$

$\Rightarrow F$ est bien définie sur $[0,+\infty[$

Pour $x < 0$ on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = +\infty \Rightarrow F$ n'est pas définie sur $]-\infty, 0[$

Ainsi $D_F = \mathbb{R}_+$.

* Continuité de F :

 • $x \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc continue p.p sur $\mathbb{R}_+$

 • $\left| \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \quad \forall x \geq 0$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \in L^1([0,+\infty[)$

Donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{x \to} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ D'après T.C.D

$$= \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0$$

2) • $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right) = - e^{-x(1+t^2)}$ existe $\forall x > 0$

 • $\left| - e^{-x(1+t^2)} \right| \leq e^{-a(1+t^2)} \quad \forall x \in [a,+\infty[,\ a > 0$

et $e^{-a(1+t^2)} \in L^1([a,+\infty[)$

Donc F est $\underline{\underline{d}}$ sur $[a,+\infty[$ $\forall a > 0 \Rightarrow$ F est $\underline{\underline{d}}$ sur $]0,+\infty[$

et $\forall x > 0 \quad F'(x) = - \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}\, dt = -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$

on pose ~~u = √x(1+t²)~~ $u = \sqrt{x}\, t$

$dt = \dfrac{du}{\sqrt{x}}$

$F'(x) = - \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$

3) En intégrant entre 0 et A avec $A > 0$:

$F(A) - F(0) = - \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right) \left(\int_0^{A} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \right)$

En faisant tendre $A \to +\infty$:

$0 - \dfrac{\pi}{2} = - \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right) \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$