Correction (Examen Semestre 2 Enit .1 .pdf)

Ex1 :

1) $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\, dx$

On a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donc cette intégrale est bien définie.

T_1 est linéaire d'après la linéarité de l'intégrale

~~Vφ~~ Soit K un compact de $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset K \subset [-A, A]$

$$|\langle T_1, \varphi \rangle| \leq \int_{-A}^{A} |\varphi(x^2)|\, dx \leq 2A \, \|\varphi\|_\infty$$

$\Rightarrow T_1$ est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $C_K = 2A$ et $m_K = 0 \Rightarrow T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

2) $\langle T_2, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\, e^{x^2}\, dx$. Cette intégrale existe puisque $\varphi' e^{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

T_2 est linéaire d'après la linéarité de la dérivation et de l'intégrale.

Soit K un cpt de $\mathbb{R}$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \subset [-A, A]$

$$|\langle T_2, \varphi \rangle| \leq \left(\int_{-A}^{A} e^{x^2} dx \right) \|\varphi'\|_\infty \leq C_K \sum_{\alpha=0}^{1} \|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty$$

$\Rightarrow T_2$ est continue $\Rightarrow T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

3) Même raisonnement.

On intègre par parties :

$$\langle T_3, \varphi \rangle = \left[\varphi(x) \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, \varphi(x)\, dx$$

$$= -\varphi(\pi) - \varphi(0) - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,\pi[}(x) \sin x\, \varphi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow T_3 = -\delta_\pi - \delta_0 - \mathbb{1}_{]0,\pi[} \sin x$$

Suite de la question 1 :

$$\langle T_1, \varphi \rangle = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{2\sqrt{u}}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}}\, du$$

$T_1 = \mathbb{1}_{]0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{u}}$.

Suite de la question 2 :

$$\langle T_2, \varphi\rangle = \left[\varphi(x)\, e^{x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} 2x\, e^{x^2} \varphi(x)\, dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} 2x\, e^{x^2} \varphi(x)\, dx$$

$T_2 = + T_f$ avec $f(x) = -2x\, e^{x^2}$

4) $\langle T_4, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, |\cos x|\, dx$ existe

T_4 est linéaire.

Soit K un cpt de $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $supp(\varphi) \subset K \subset [-A, A]$

$|\langle T_4, \varphi\rangle| \leq 2A \|\varphi\|_\infty \Rightarrow T_4$ est continue $\Rightarrow T_4 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$T_4 = T_f$ avec $f(x) = |\cos x|$

<u>Ex 2 :</u>

1) $$\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(0) + x\varphi'(\xi_x)}{x}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{A>|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{A>|x|>\varepsilon} \varphi'(\xi_x)\, dx\right) \quad \text{avec } supp(\varphi) \subset [-A, A]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varphi(0)\left(-\ln|-A| + \ln|-\varepsilon| + \ln|A| - \ln|\varepsilon|\right) + \int_{A>|x|>\varepsilon} \varphi'(\xi_x)\, dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\cancel{\varphi(0)} \cancel{(\ln A - \ln \varepsilon)} \int_{A>|x|>\varepsilon} \varphi'(\xi_x)\, dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{A>|x|>\varepsilon\}}(x)\, \varphi'(\xi_x)\, dx$$

On a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{1}_{\{A>|x|>\varepsilon\}}(x)\, \varphi'(\xi_x) = \mathbb{1}_{\{A>|x|\geq 0\}}(x)\, \varphi'(\xi_x) \; \cancel{\in L^1(\mathbb{R})}$$

$$\left| \mathbb{1}_{\{A>|x|>\varepsilon\}}(x)\, \varphi'(\xi_x)\right| \leq |\varphi'(\xi_x)| \in L^1(\mathbb{R}) \text{ car } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$T.C.D \Rightarrow \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle = \int_{A>|x|\geq 0} \varphi'(\xi_x)\, dx$$

$\Rightarrow$ la limite existe.

D'autre part $vp(\frac{1}{x})$ est linéaire

Soit K un cpt de $\mathbb{R}$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K \subset [-A, A]$

$$|\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle| \leq \left(\int_{A > |x| > 0} dx \right) \|\varphi'\|_\infty = 2A \|\varphi'\|_\infty$$

$\Rightarrow vp(\frac{1}{x})$ est continue $\Rightarrow vp(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = -\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \left[\frac{\varphi(x)}{x} \right]_{|x|>\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right.$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right\}$$

or $\dfrac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \dfrac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} = -\dfrac{1}{\varepsilon} \left(\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) \right)$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \left(\varphi(0) + \varepsilon h(\varepsilon) + \varphi(0) + \varepsilon h(\varepsilon) \right)$$

$$= -\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} + h(\varepsilon)$$

$$= -\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x^2} dx + \underbrace{h(\varepsilon)}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0}$$

$$\Rightarrow \langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx \right\}$$

3) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle x\, vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \cancel{\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon}} \langle vp(\tfrac{1}{x}), x\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$$

$\Rightarrow x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.

Ex3 : Laisser tomber

Ex4 : Même raisonnement dans l'ex 1 de la serie 5.

Correction (Examen_Malhsz_AU 2011_2012_ENIT-1.pdf)

Ex4 :

1) $\int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\,du$ après chg. de vari $u = kx$

$\Rightarrow f_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

2) $\langle T_k, \varphi \rangle - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx}_{=1}$$

$$= \cancel{\int_{\mathbb{R}^n} \left(f_k(x) - f_k(0)\right.}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right) dx$$

$$= \int_{\|x\| \leq \eta} + \int_{\|x\| > \eta}$$

3) $* \int_{\|x\| \leq \eta} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,|f_k(x)|\,dx = \int_{\|x\| \leq \eta} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,k^n |f(kx)|\,dx$

$$\overset{u=kx}{=} \int_{\|u\| \leq k\eta} \left|\varphi\left(\frac{u}{k}\right) - \varphi(0)\right| |f(x)|\,dx \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \text{ par } \underline{\underline{\text{TCD}}}$$

$* \int_{\|x\| > \eta} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,|f_k(x)|\,dx \overset{u=kx}{=} \int_{\|u\| > k\eta} \left|\varphi\left(\frac{u}{k}\right) - \varphi(0)\right| |f(x)|\,dx$

$\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente

4) Donc $\lim_{k \to +\infty} T_k = \delta_0$ ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(4)