CHAPITRE 2 : LES CARACTERISTIQUES METROLOGIQUES

2.1 LES ERREURS SYSTEMATIQUES

Ce sont des erreurs reproductibles, elles sont constantes et/ou à variation lente par rapport à la durée de mesure. Elles introduisent donc un décalage constant entre la valeur vraie et la valeur mesurée. Ces erreurs peuvent avoir plusieurs causes, dont nous présentons les plus fréquentes :

Les erreurs sur la valeur d'une grandeur de référence (ex : le décalage du zéro d'un appareil analogique).

Les erreurs sur la sensibilité ou sur la courbe d'étalonnage d'un capteur

Les erreurs dues au mode ou aux conditions d'emploi (ex : l'erreur de rapidité qui résulte d'une mesure faite avant que le régime permanent ne soit atteint)

2.2 LES ERREURS ACCIDENTELLES OU ALEATOIRES

Ce sont des erreurs non reproductibles, leurs apparitions et leurs valeurs sont considérées comme aléatoires. Certaines de leurs causes peuvent être connues, mais les valeurs des erreurs qu'elles entraînent au moment de la mesure sont inconnues. Elles sont déterminées à partir de lois statistiques. Exemple :

Les erreurs liées aux indéterminations intrinsèques des caractéristiques instrumentales telles que :

L'erreur de mobilité ε_m : c'est la variation maximale du mesurande qui n'entraîne pas de variation détectable de la grandeur de sortie du capteur. Exemple : un potentiomètre bobiné pour lequel un déplacement du curseur inférieur à la distance entre deux spires peut n'entraîner aucune variation de la tension de sortie.

L'erreur de lecture d'un appareil analogique ε_l : elle résulte de la plus ou moins grande habilité de l'opérateur ainsi que de la qualité de l'appareil. Exemple : finesse de l'aiguille.

L'erreur de résolution ε_r : c'est la variation minimale du mesurande mesuré avec un capteur donné. Elle est la combinaison de l'erreur de mobilité et de l'erreur de lecture :

$$\varepsilon_r = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_l^2}$$

L'erreur d'hystérésis : Lorsqu'un des éléments de la chaîne de mesure comporte un composant présentant de l'hystérésis (par exemple un ressort), sa réponse dépend de ses conditions d'utilisation antérieure. Cette erreur est évaluée en supposant qu'elle est égale à la moitié de l'écart maximal des valeurs de la grandeur de sortie correspondant à une valeur du mesurande, selon que cette dernière est obtenue par des valeurs croissantes ou décroissantes.

Les erreurs dues à des grandeurs d'influence

2.3 TRAITEMENT STATISTIQUE DES MESURES

Des mesures répétées plusieurs fois donnent des résultats dispersés en raison des erreurs dont elles sont entachées. Il faut donc appliquer un traitement statistique afin de connaître la valeur la plus probable de la grandeur mesurée et de fixer les limites de l'incertitude. Ce traitement s'effectue en plusieurs étapes qui consistent à :

- Etablir la distribution des données, une représentation graphique de la distribution permettra une première évaluation des mesures.
- Caractériser la distribution statistique par la mesure de la tendance centrale (moyenne, mode, médiane).
- Déterminer la dispersion de la distribution par la variation des résultats de mesure par rapport à la valeur moyenne (variance, écart-type).

2.3.1 Caractérisation statistique d'une distribution

Lorsque la mesure d'une même grandeur X a été répétée n fois en donnant les résultats x_1, $x_2 \ldots x_m$, et si on suppose que la valeur x_1 a été obtenue n_1 fois, la valeur x_2 obtenue n_2 fois …et x_n obtenue n_m fois :

Le nombre total d'observations $n = n_1 + n_2 + \ldots n_n$ et la fréquence relative de distribution qui correspond à la probabilité d'apparition des valeurs x_1, $x_2 \ldots x_m$ est donc :

$$f_n(x_1) = \frac{n_1}{n},\ f_n(x_2) = \frac{n_2}{n}, \ldots f_n(x_n) = \frac{n_n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} f_n(x_i) = 1$$

La représentation graphique par histogramme, par la courbe de fréquence relative, ou par le diagramme de fréquence cumulée permet de visualiser la distribution. Plus le nombre d'observations augmente, et plus les fluctuations diminuent.

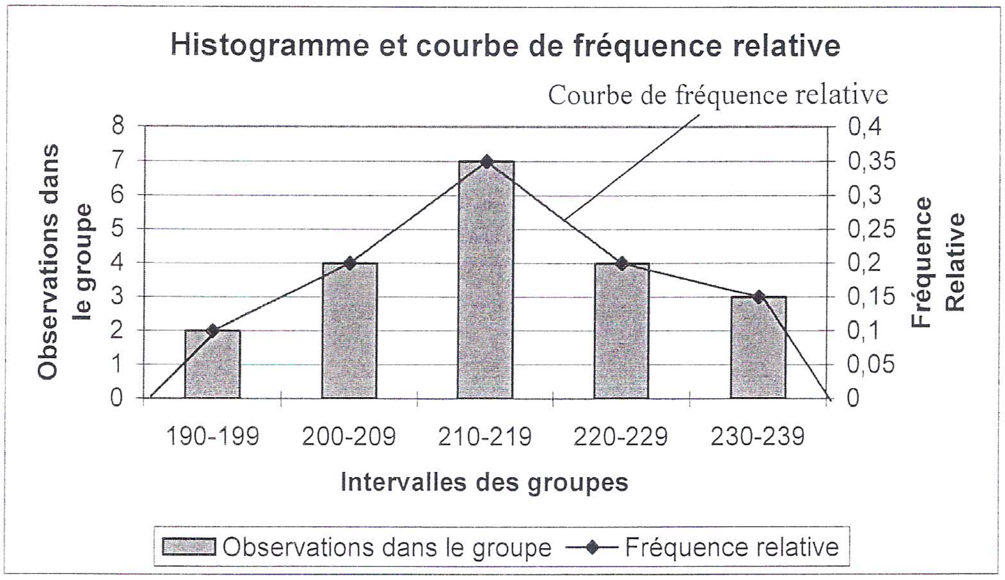
Exemple :

La température d'un four a été mesurée toutes les 30 mn pendant une période de 10 h. Les valeurs obtenues sont consignées dans le tableau ci-dessous.

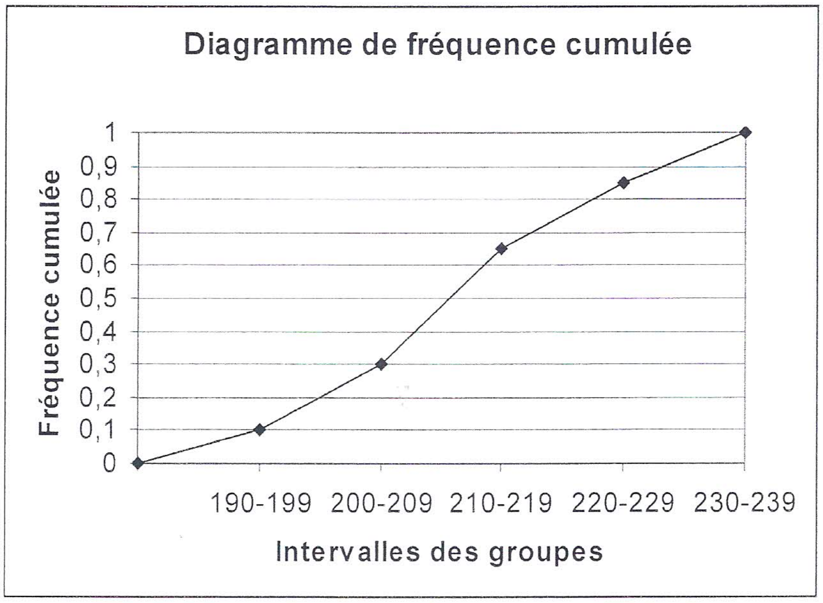
N° de la mesure	Température (°C)	N° de la mesure	Température (°C)
1	209	11	212
2	195	12	205
3	212	13	225
4	225	14	214
5	216	15	216
6	228	16	216
7	231	17	205
8	212	18	193
9	237	19	220
10	200	20	230

Il faut commencer par ordonner ces valeurs et les diviser en groupes pour déterminer la fréquence de distribution et représenter graphiquement la distribution:

Intervalles des groupes	Observations dans le groupe	Fréquence relative	Fréquence cumulée
190-199	2	0.1	0.1
200-209	4	0.2	0.3
210-219	7	0.35	0.65
220-229	4	0.2	0.85
230-239	3	0.15	1
Total	20	1	



On peut également représenter le diagramme de fréquence cumulée :



2.3.2 Mesures de la tendance centrale d'une distribution

La moyenne (The mean) : Lorsque la mesure d'une même grandeur X a été répétée n fois, donnant les résultats $x_1, x_2 \ldots x_n$, la valeur moyenne est définie par :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

C'est la mesure de la tendance centrale la plus utilisée, $\overline{x}$ s'approche de la vraie valeur lorsque le nombre de mesures augmente.

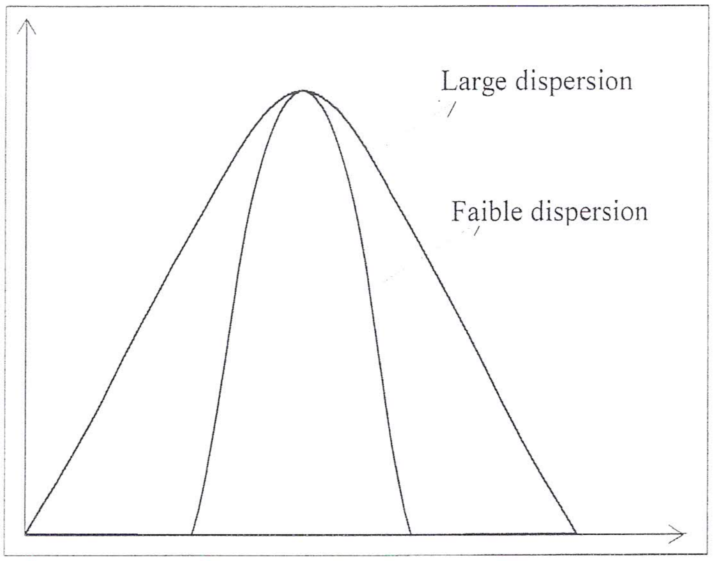
La médiane (The median) : C'est la valeur centrale dans un groupe de données ordonnées.

Le mode (The mode) : C'est la valeur la plus fréquente, elle correspond au pic de la courbe de fréquence relative.

Pour l'exemple que nous avons présenté, les trois mesures de la tendance centrale ne donnent pas les mêmes résultats : la moyenne est égale à 215.05 °C, la médiane a pour valeur 215 °C et le mode est égal à 214.5 °C.

2.3.3 Mesures de la dispersion d'une distribution

Deux distributions de données différentes peuvent avoir la même moyenne mais pas la même dispersion :



Il existe plusieurs mesures de dispersion :

Le domaine (The range) : $R = x_{max} - x_{min}$

La déviation moyenne (The mean deviation) : $d_x = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|\right)$

La variance : $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2\right)$

L'écart type (The standard deviation) : $\sigma = \left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

Le coefficient de variation : $C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}\ 100\ (\%)$

L'erreur standard sur la moyenne : $S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $S_x \to 0$ quand $n \to \infty$

Lorsque les erreurs aléatoires qui affectent les mesures sont indépendantes, la probabilité d'apparition des différents résultats de mesure satisfait à la loi normale dite également **loi de Gauss**. La probabilité $P(x_1, x_2)$ d'obtenir comme résultat d'une mesure une valeur du mesurande comprise entre deux valeurs x_1 et x_2 peut s'écrire :

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

où p(x) est la densité de probabilité pour la valeur x du mesurande.

Dans le cas de la loi de Gauss : $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right)$.

La valeur de x la plus probable est $\overline{x}$. La probabilité d'apparition d'un résultat de mesure dans les limites indiquées est :

$P(\overline{x} \pm \sigma) = 68.27\%$ $\qquad$ $P(\overline{x} \pm 2\sigma) = 95.45\%$ $\qquad$ $P(\overline{x} \pm 3\sigma) = 99.73\%$

2.4 ERREURS TOTALES D'UN SYSTEME DE MESURE

Un appareil de mesure est souvent constitué de plusieurs composants, chacun d'entre eux pouvant être sujet à des erreurs systématiques et aléatoires. On peut évaluer les erreurs de chaque composant et les combiner pour avoir l'erreur totale du système de mesure.

2.4.1 Erreur d'une somme

On considère une grandeur X qui s'obtient par la mesure de Y et Z tels que $X = Y + Z$, les nombres Y et Z étant positifs.

Si on suppose que la mesure de Y donne y ± dy et que la mesure de Z donne z ± dz on a donc:

$X = y + z \pm (dy + dz) \Rightarrow dx = dy + dz$

Dans le cas d'une somme, les erreurs absolues s'ajoutent.

2.4.2 Erreur d'une différence

On considère une grandeur X qui s'obtient par la mesure de Y et Z tels que $X = Y - Z$, les nombres Y et Z étant positifs.

Si on suppose que la mesure de Y donne y ± dy et que la mesure de Z donne z ± dz, on a donc: $X = y - z \pm (dy + dz) \Rightarrow dx = dy + dz$

Dans le cas d'une différence, les erreurs absolues s'ajoutent.

2.4.3 Erreur d'un produit

On considère une grandeur X qui s'obtient par la mesure de Y et Z tels que X=Y.Z, les nombres Y et Z étant positifs.

Si on suppose que la mesure de Y donne y ± dy et que la mesure de Z donne z ± dz :

$Ln(X) = ln(Y) + ln(Z)$ et $dX/X = dY/Y + dZ/Z$

Ainsi $\Delta X/X = \Delta Y/Y + \Delta Z/Z$

Dans le cas d'un produit, les erreurs relatives s'ajoutent.

2.4.4 Erreur d'un quotient

On considère une grandeur X qui s'obtient par la mesure de Y et Z tels que X=Y/Z, les nombres Y et Z étant positifs.

Si on suppose que la mesure de Y donne y ± dy et que la mesure de Z donne z ± dz :

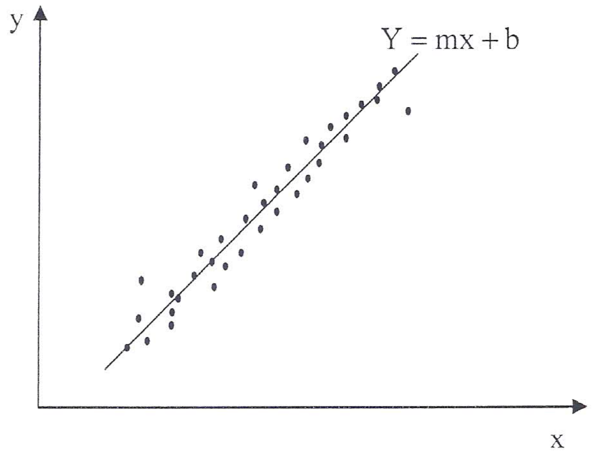
$Ln(X) = ln(Y) - ln(Z)$ et $dX/X = dY/Y - dZ/Z$

Ainsi $\Delta X/X = \Delta Y/Y + \Delta Z/Z$

Dans le cas d'un quotient, les erreurs relatives s'ajoutent.

2.5 REGRESSION LINEAIRE

L'analyse de régression fournit une approche statistique qui permet de corréler des données expérimentales qui dépendent de plusieurs grandeurs mesurées.
Si on mesure une variable y qui décrit le comportement d'un processus et qui dépend de plusieurs variables x_1, x_2 ...x_n indépendantes ; la méthode des moindres carrés permet de relier par une droite des points dispersés : $Y_i = mx_i + b$ et $y_i = f(x_i)$



Les paramètres m et b sont tels qu'ils minimisent l'écart entre le point et la droite : $\Delta^2 = \sum (y_i - Y_i)^2$, en écrivant que $\frac{\partial \Delta^2}{\partial m} = 0$ et $\frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = 0$ on obtient :

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{\left(\sum x\right)^2 - n \sum x^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{\left(\sum x\right)^2 - n \sum x^2}$$

La dispersion de y est une mesure de la corrélation : si la dispersion est faible l'analyse de régression est adaptée pour décrire la variation de y et si la dispersion est élevée l'analyse de régression n'est pas adaptée.

Le coefficient de corrélation $\rho^2 = 1 - \frac{n-1}{n-2} \frac{\left[y^2\right] - m[xy]}{\left[y^2\right]}$

avec : $\left[y^2\right] = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}$ et $[xy] = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n}$

Si ρ^2 est proche de 1 alors x et y sont parfaitement corrélés et la méthode de régression linéaire est adaptée.

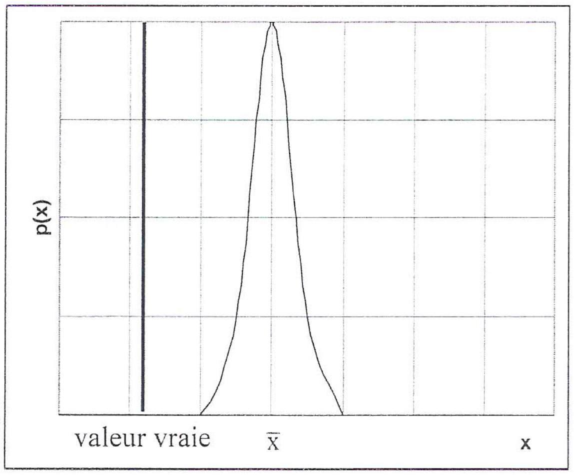
2.6 FIDELITE, JUSTESSE ET PRECISION

La fidélité : elle caractérise un appareil de mesure dont les erreurs aléatoires sont faibles, ce qui se traduit par des résultats de mesure groupés autour de leur valeur moyenne.

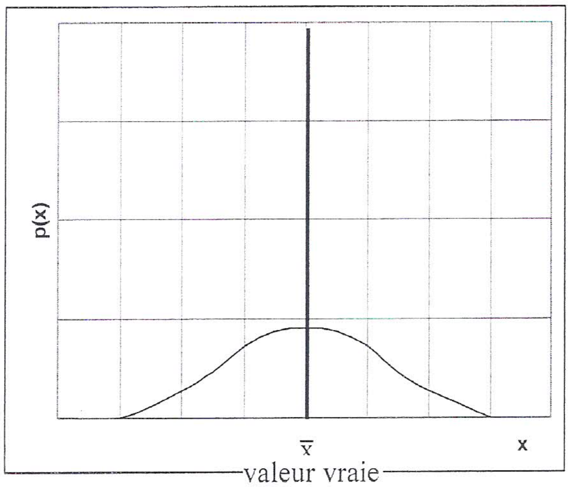
La justesse : elle caractérise un appareil de mesure dont les erreurs systématiques sont faibles. La valeur la plus probable du mesurande déterminée par un tel appareil de mesure est très proche de la vraie valeur.

La précision : elle caractérise un appareil de mesure qui est tel que chaque mesure soit très proche de la valeur vraie du mesurande, un appareil précis est donc à la fois juste et fidèle. La précision peut être spécifiée numériquement comme l'intervalle autour de la valeur mesurée, à l'intérieur duquel on est assuré de trouver la valeur vraie.

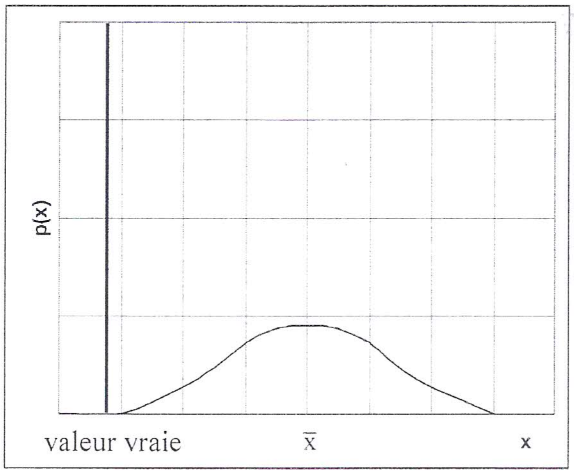
Fidélité + Justesse $\Leftrightarrow$ Précision



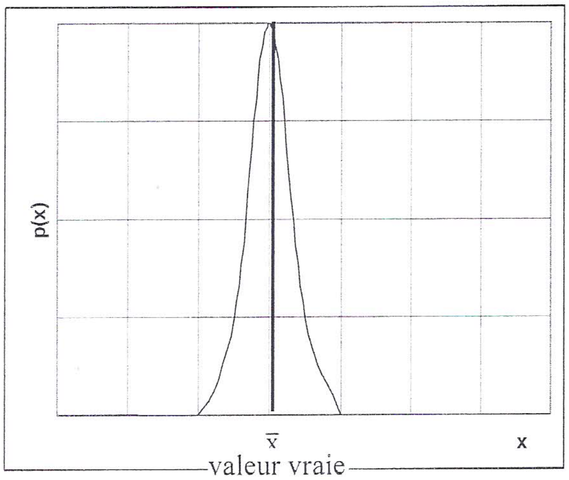
Erreurs systématiques importantes et erreurs aléatoires faibles :
appareil fidèle mais pas juste



Erreurs systématiques faibles et erreurs aléatoires élevées :
appareil juste mais pas fidèle



Erreurs systématiques et aléatoires élevées :
appareil ni juste ni fidèle



Erreurs systématiques et aléatoires faibles :
appareil juste et fidèle donc PRECIS