Problèmes d'Analyse Numérique

Problème 1

Soit $(a,b) \in I\!R^2$ tel que $a < b$. Soient $g : [a,b] \longrightarrow I\!R$ une fonction de classe C^1 et $f : [a,b] \times [a,b] \times I\!R \longrightarrow I\!R$ une fonction de classe C^1 vérifiant la condition de Lipschitz :

$$\exists\, L > 0;\ \forall x, \xi \in [a,b],\ \forall\, y, z \in I\!R, \quad |f(x,\xi,y) - f(x,\xi,z)| \leq L|y-z|.$$

On considère le problème intégral suivant :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y \in C^0([a,b]) \text{ telle que} \\ \\ y(x) = g(x) + \displaystyle\int_a^x f(x,\xi,y(\xi))\, d\xi, \quad \forall x \in [a,b] \end{array} \right.$$

et on suppose que ce problème admet une solution unique notée $Y(\cdot)$.

Pour résoudre numériquement (1), on pose $h = \dfrac{b-a}{N}$ $(N \in I\!N^*)$, $x_n = a + nh$ $(0 \leq n \leq N)$ et on définit la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ solution de

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = g(x_0) \\ y_n = g(x_n) + h \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, y_i), \quad n \geq 1. \end{array} \right.$$

On veut étudier la convergence de la méthode numérique (2).

1– Soient $\varphi \in C^1([a,b])$ et $n \in I\!N^*$. Montrer qu'il existe $\xi_n \in [a,b]$ tel que :

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(\xi)\, d\xi = h \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i) + \frac{h}{2}(x_n - x_0)\varphi'(\xi_n).$$

[**Indication :** on pourra utiliser la formule du rectangle à gauche donnée par :

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\, d\xi = (\beta - \alpha)\varphi(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\varphi'(\gamma), \quad \text{où } \gamma \in [\alpha, \beta] \quad].$$

2– On pose :

$$\varepsilon_n = Y(x_n) - g(x_n) - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, Y(x_i)), \quad n \geq 1.$$

Montrer que $|\varepsilon_n| \leq Ch$, où C est une constante positive indépendante de h.
[**Indication :** on pourra utiliser (3) avec $\varphi(\xi) = f(x_n, \xi, Y(\xi))$].

3– On pose $e_n = Y(x_n) - y_n$. Vérifier que :

$$|e_n| \leq hL \sum_{i=0}^{n-1} |e_i| + |\varepsilon_n| \leq hL \sum_{i=0}^{n-1} |e_i| + Ch, \quad n \geq 1.$$

4– En déduire que $|e_n| \leq Ch \exp((b-a)L)$ (c'est à dire que $|e_n| = O(h)$).
[**Indication :** on utilisera le résultat suivant : Si $(u_n)_{n \in I\!N}$ est une suite réelle positive vérifiant :

$$u_n \leq A + B \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1$$

où A et B sont des constantes positives, alors on a :

$$u_n \leq (A + Bu_0)\exp(nB), \quad n \geq 1].$$

Problème 2

Soient x_0, x_1 et x_2 trois nombres réels tels que $x_0 < x_1 < x_2$. On note $\mathcal{P}_m$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq m$.

Soit $g : [x_0, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5.

1– Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_4$ unique vérifiant :

$$\begin{array}{lll} P(x_0) = g(x_0), & P(x_1) = g(x_1), & \\ P'(x_0) = g'(x_0), & P'(x_1) = g'(x_1) \quad \text{et} & P'(x_2) = g'(x_2). \end{array}$$

[**Indication :** on pourra d'abord montrer l'unicité et en déduire l'existence].

2– Soit W le polynôme d'interpolation d'Hermite vérifiant :

$$\begin{array}{lll} W(x_0) = 0, & W(x_1) = 0, & W(x_2) = 1, \\ W'(x_0) = 0, & W'(x_1) = 0 \quad \text{et} & W'(x_2) = 0. \end{array}$$

2–a Montrer que $W(x)$ peut s'écrire :

$$W(x) = \alpha(x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - \beta)$$

et que $\alpha \neq 0$ et $\beta \notin [x_0, x_2]$.
(On ne demande pas de calculer les valeurs de α et de β).

2–b En déduire que $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}$.

2–c Soit P le polynôme introduit en 1–. Soit $t \in [x_0, x_2]$.
Montrer qu'il existe $\xi = \xi(t) \in]x_0, x_2[$ tel que

$$g(t) - P(t) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{W^{(5)}(\xi)} W(t) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{120}(t - x_0)^2(t - x_1)^2(t - \beta)$$

[**Indication :** on pourra considérer, pour $t \neq x_0$ et $t \neq x_1$, la fonction

$$x \mapsto G(x) = g(x) - P(x) - \frac{g(t) - P(t)}{W(t)} W(x)\,].$$

Problème 3

Soit $(Q_o, Q_1, \cdots, Q_n, \cdots)$ la suite de polynômes moniques[1], orthogonaux sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ relativement à la fonction poids ω ($\omega(x) > 0$ sur $[a, b]$), telle que le degré de Q_k est égal à k.

1– On pose $Q_n(x) \times \omega(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n U_n(x)}{\mathrm{d}x^n}$.

1-a Montrer que U_n vérifie l'équation différentielle :

$$\text{(I)} \qquad \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \left[\frac{1}{\omega(x)} \times \frac{\mathrm{d}^n U_n(x)}{\mathrm{d}x^n} \right] = 0$$

et que pour tout polynôme p de degré $\leq n - 1$, on a :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} U_n(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}} p(x) - \frac{\mathrm{d}^{n-2} U_n(x)}{\mathrm{d}x^{n-2}} \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} U_n(x) \frac{\mathrm{d}^{n-1} p(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}} \right]_a^b = 0$$

(où $[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$).

---

[1]le coefficient de x^k dans Q_k est égale à 1

On suppose dans toute la suite que U_n vérifie :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} U_n(a) = \dfrac{dU_n}{dx}(a) = \cdots\cdots = \dfrac{d^{n-1}U_n}{dx^{n-1}}(a) = 0 \\ \\ U_n(b) = \dfrac{dU_n}{dx}(b) = \cdots\cdots = \dfrac{d^{n-1}U_n}{dx^{n-1}}(b) = 0 \end{cases}$$

1-b En écrivant $Q_n(x) = x^n + p(x)$, avec p un polynôme de degré $\leq n-1$, montrer que $\gamma_n \equiv \int_a^b [Q_n(x)]^2 \omega(x)\,dx$ est donné par : $\gamma_n = \int_a^b x^n Q_n(x)\omega(x)\,dx$, $n \geq 1$.
En déduire que : $\gamma_n = (-1)^n n! \int_a^b U_n(x)\,dx$.

2– On rappelle que les polynômes orthogonaux Q_n sur $[a,b]$ relativement à la fonction poids ω, vérifient la formule de récurrence suivante :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} Q_o(x) = 1 \\ Q_n(x) = (x - \alpha_n)Q_{n-1}(x) - \beta_n Q_{n-2}(x) \qquad ; n \geq 1 \end{cases}$$

avec $\beta_n = \dfrac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}$; $\alpha_n = \dfrac{(xQ_{n-1}, Q_{n-1})_\omega}{\gamma_{n-1}}$; $\gamma_n = (Q_n, Q_n)_\omega$;
$((f,g)_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,dx)$. (On pose $Q_{-1}(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et $\gamma_{-1} = 1$).
Démontrer l'égalité de *Christoffel-Darboux* suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{\gamma_k} = \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)}{(x-y)\gamma_n}$$

Indication : Ecrire (III) pour n=k, multiplier l'égalité obtenue par $\dfrac{Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}}$, puis échanger le rôle de x et y et faire la différence des deux équations obtenues.

3– Déduire de l'égalité de *Christoffel-Darboux* que les coefficients λ_i de la formule de Gauss à <u>n points</u> : $\int_a^b f(x)\omega(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + E_n(f)$, sont donnés par :

$$\lambda_i = \frac{-\gamma_n}{Q_n'(x_i)Q_{n+1}(x_i)} = \frac{\gamma_{n-1}}{Q_n'(x_i)Q_{n-1}(x_i)} \qquad ; 1 \leq i \leq n$$

où $\gamma_n = (Q_n, Q_n)_\omega$.
Indication : Les n points x_i, $1 \leq i \leq n$, sont les n racines réelles et distinctes de Q_n.
On rappelle que $\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\omega(x)\,dx$, où L_i est le polynôme de Lagrange aux points $x_1, \cdots, x_n$, donné par :

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{Q_n(x)}{(x - x_i).Q_n'(x_i)} \qquad ; 1 \leq i \leq n$$

4– On suppose dans toute la suite que $a = -1$, $b = 1$ et $\omega(x) = 1$ sur $[-1, 1]$.

4-a Montrer que (I) et (II) impliquent que $U_n(x) = K_n.(x^2 - 1)^n$ où K_n est une constante (indépendante de x) arbitraire.
En déduire que :

$$Q_n(x) = K_n n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

(On rappelle que $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f \times g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \dfrac{\mathrm{d}^{n-k} f}{\mathrm{d}x^{n-k}} \times \dfrac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}x^k}$ et $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$).

Utilisant le fait que Q_n est monique, montrer que $K_n = \dfrac{1}{n! C_{2n}^n}$.

(On rappelle que $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$).

4-b Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx$. On a $I_n = \dfrac{(-1)^n 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$.
En déduire une expression de γ_n en fonction de n, $n \geq 1$.

4-c En déduire que (III) s'écrit sous la forme :

$$\text{(III}') \qquad Q_n(x) = xQ_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} Q_{n-2}(x); \qquad n \geq 1$$

4-d On donne la formule suivante :

$$(1-x^2) Q_n'(x) = (n+1) x Q_n(x) - (2n+1) Q_{n+1}(x)$$

Montrer que :

$$\lambda_i = \frac{2n-1}{n^2} \frac{\gamma_{n-1}}{[Q_{n-1}(x_i)]^2} (1 - x_i^2) \qquad ; 1 \leq i \leq n$$

4-e On pose :

$$\begin{cases} \theta_n(x) = \mu_n Q_n(x) \\ \\ \theta_n(1) = 1 \end{cases} \qquad n \geq 1 \quad \text{(Polynômes de Legendre)}$$

Montrer que : $\mu_n = \dfrac{C_{2n}^n}{2^n}$ et $\|\theta_n\|_\omega^2 \equiv \int_{-1}^{1} \theta_n^2(x) \omega(x) \, dx = \dfrac{2}{2n+1}$ (avec $\omega(x) = 1$)

et que : $\begin{cases} \theta_n(x) = \dfrac{2n-1}{n} x \theta_{n-1}(x) - \dfrac{n-1}{n} \theta_{n-2}(x) \quad ; n \geq 1 \\ \theta_o(x) = 1 \end{cases}$

(On pose $\theta_{-1}(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$).

4-f En déduire que : $\lambda_i = \dfrac{2(1-x_i^2)}{n^2 \theta_{n-1}^2(x_i)}$; où les x_i, $1 \leq i \leq n$, sont les n racines réelles de Q_n.