Corrigé des Problèmes

Problème 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient :

$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

$f : [a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant la condition de Lipschitz

$$\exists L > 0;\ \forall x, \xi \in [a,b],\ \forall y, z \in \mathbb{R},\ |f(x,\xi,y) - f(x,\xi,z)| \leq L|y-z|.$$

On considère le problème intégral suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Trouver } y \in C^0([a,b]) \text{ telle que} \\ y(x) = g(x) + \int_a^x f(x,\xi,y(\xi))\,d\xi, \quad \forall x \in [a,b] \end{cases}$$

et on suppose que ce problème admet une solution unique notée $Y(.)$.

Pour résoudre numériquement (1), on pose $h = \frac{b-a}{N}$ $(N \in \mathbb{N}^*)$, $x_n = a + nh$, $0 \leq n \leq N$, et on définit la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ solution de

$$(2)\quad \begin{cases} y_0 = g(x_0) \\ y_n = g(x_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, y_i), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

On veut étudier la convergence de la méthode numérique (2).

1- Soient $\varphi \in C^1([a,b])$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons qu'il existe $\xi_n \in [a,b]$ tel que

$$(3)\quad \int_{x_0}^{x_n} \varphi(\xi)\,d\xi = h\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(x_i) + \frac{h}{2}(x_n - x_0)\,\varphi'(\xi_n)$$

On a $\displaystyle\int_{x_0}^{x_n}\varphi(\xi)\,d\xi = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(\xi)\,d\xi.$

En utilisant la formule du rectangle à gauche sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(\xi)\,d\xi &= (x_{i+1} - x_i)\,\varphi(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2}\varphi'(\gamma_i)\ ;\ x_i \leq \gamma_i \leq x_{i+1}. \\ &= h\,\varphi(x_i) + \frac{h^2}{2}\varphi'(\gamma_i)\ ;\end{aligned}$$

Et par suite, on a

$$(*)\quad \int_{x_0}^{x_n}\varphi(\xi)\,d\xi = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(\xi)\,d\xi = h\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(x_i) + \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi'(\gamma_i).$$

La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^1$, alors on a : $m \leq \varphi'(\gamma_i) \leq M$,

où $m = \inf_{x\in[a,b]} \varphi'(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} \varphi'(x)$. D'où

$$n\,m \leq \sum_{i=0}^{n-1} \varphi'(\gamma_i) \leq n\,M \Rightarrow m \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi'(\gamma_i) \leq M.$$

Ainsi il existe $\xi_n \in [a,b]$ tel que $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi'(\gamma_i) = \varphi'(\xi_n)$.

D'où $\sum_{i=0}^{n-1}\varphi'(\gamma_i) = n\,\varphi'(\xi_n) = \frac{x_n - x_0}{h}\varphi'(\xi_n)$.

Et par suite, d'après (*), on obtient

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(\xi)\,d\xi = h\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(x_i) + \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi'(\gamma_i)$$

$$= h\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(x_i) + \frac{h^2}{2}\,\frac{x_n - x_0}{h}\,\varphi'(\xi_n), \quad \text{où } \xi_n \in [a,b]$$

On a alors :

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(\xi)\,d\xi = h\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(x_i) + \frac{h}{2}(x_n - x_0)\,\varphi'(\xi_n), \quad \text{où } \xi_n \in [a,b].$$

2 - On pose $\quad \varepsilon_n = Y(x_n) - g(x_n) - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, Y(x_i)), \quad n \geq 1.$

Montrons que $|\varepsilon_n| \leq Ch$, où C est une constante positive indépendante de h.

Posons $\varphi(\xi) = f(x_n, \xi, Y(\xi))$. Alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f et Y sont de classe C^1 (La régularité C^1 de $Y(\cdot)$, découle du fait que g est C^1 par hypothèse, et que $x \longmapsto \int_a^x f(x,\xi,Y(\xi))\,d\xi$ est de classe C^1 puisque Y et f sont continues).

On a :

$$\varepsilon_n = Y(x_n) - g(x_n) - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, Y(x_i))$$

$$\underset{(1)}{=} \int_a^{x_n} f(x_n, \xi, Y(\xi))\,d\xi - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, Y(x_i))$$

$$\underset{a=x_0}{=} \int_{x_0}^{x_n} \varphi(\xi)\,d\xi - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, Y(x_i)) = \int_{x_0}^{x_n}\varphi(\xi)\,d\xi - h\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(x_i)$$

$$\underset{1-}{=} \frac{h}{2}(x_n - x_0)\,\varphi'(\xi_n), \quad \text{où } \xi_n \in [a,b]$$

D'où $\quad |\varepsilon_n| = \frac{h}{2}|x_n - x_0|\,|\varphi'(\xi_n)| \leq \frac{h}{2}(b-a)\,|\varphi'(\xi_n)|$

or φ' étant continue sur $[a,b]$, alors on a $|\varphi'(\xi_n)| \leq M$ où M est une constante positive. ($M = \sup_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|$).

Ainsi $\exists\, C > 0; \quad |\varepsilon_n| \leq Ch \quad \left(C = \frac{b-a}{2}M\right)$.

3- On pose $e_n = Y(x_n) - y_n$. Vérifions que

$$|e_n| \leq hL \sum_{i=0}^{n-1} |e_i| + |\varepsilon_n| \leq hL \sum_{i=0}^{n-1} |e_i| + Ch, \qquad n \geq 1.$$

On a, d'après 2- :

$$Y(x_n) = \varepsilon_n + g(x_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, Y(x_i))$$

et d'après le schéma (2) :

$$y_n = g(x_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, y_i).$$

D'où :

$$e_n = Y(x_n) - y_n = \varepsilon_n + h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, Y(x_i)) - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_n, x_i, y_i)$$

et par suite

$$|e_n| \leq |\varepsilon_n| + h \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_n, x_i, Y(x_i)) - f(x_n, x_i, y_i) \right|$$

Or f est Lipschitzienne par rapport à la $3^{\text{ème}}$ variable, il s'en suit que :

$$|e_n| \leq |\varepsilon_n| + h \sum_{i=0}^{n-1} L \, |Y(x_i) - y_i|, \qquad n \geq 1$$

et donc

$$|e_n| \leq |\varepsilon_n| + hL \sum_{i=0}^{n-1} |e_i|, \qquad n \geq 1.$$

Utilisant alors, la question 2-, on obtient :

$$(**) \qquad |e_n| \leq |\varepsilon_n| + hL \sum_{i=0}^{n-1} |e_i| \leq Ch + hL \sum_{i=0}^{n-1} |e_i|, \qquad n \geq 1.$$

4- Nous allons en déduire que $|e_n| \leq Ch\, e^{(b-a)L}$ (i.e. que $|e_n| = \mathcal{O}(h)$).

Pour cela, nous allons utiliser le résultat suivant :

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle positive vérifiant :

$$u_n \leq A + B \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1$$

(où A et B sont des constantes positives)

Alors, on a

$$u_n \leq (A + B u_0)\, e^{nB}, \quad n \geq 1.$$

En appliquant ce résultat à la suite $(e_n)_n$, on a d'après $(**)$:

$$|e_n| \leq \left(Ch + hL |e_0| \right) e^{nhL}$$

or $e_0 = Y(x_0) - y_0 = g(x_0) - g(x_0) = 0$, et $nh \leq Nh = b - a$.

Et par suite on obtient :

$$|e_n| \leq Ch\, e^{(b-a)L}.$$

Ainsi $|e_n| = \mathcal{O}(h)$. ∎

Problème 2

Soient x_0, x_1 et x_2 trois nombres réels tels que $x_0 < x_1 < x_2$. On note $\mathcal{P}_m$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq m$

Soit $g : [x_0, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5.

1– Montrons qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_4$ unique vérifiant :

$$(*) \quad \begin{cases} P(x_0) = g(x_0), & P(x_1) = g(x_1), \\ P'(x_0) = g'(x_0), & P'(x_1) = g'(x_1) \quad \text{et} \quad P'(x_2) = g'(x_2). \end{cases}$$

– Montrons d'abord l'unicité : supposons qu'il existe deux polynômes P et Q dans $\mathcal{P}_4$ vérifiant $(*)$, et soit $R = P - Q$. Alors le polynôme $R \in \mathcal{P}_4$ et vérifie :

$$R(x_0) = R(x_1) = 0 \quad \xRightarrow[\text{de Rolle}]{\text{Théorème}} \quad \exists\, c \in]x_0, x_1[\text{ tel que } R'(c) = 0$$

et

$$R'(x_0) = R'(x_1) = R'(x_2) = 0.$$

Ainsi $R' \in \mathcal{P}_3$ s'annule en 4 points distincts, et donc nécessairement $R' = 0$, d'où $R(x) = \text{cte}$, $\forall x$. Or $R(x_0) = 0$, et par suite $R \equiv 0$, i.e $P = Q$, d'où l'unicité.

– Montrons l'existence :

un polynôme $P \in \mathcal{P}_4$ s'écrit $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4$.

Soit $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & 4x_0^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Posons $\Lambda = (\lambda_i)_{0 \leq i \leq 4}$ et $G = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g'(x_0) \\ g'(x_1) \\ g'(x_2) \end{pmatrix}$

On a alors les équivalences suivantes :

[Trouver $P \in \mathcal{P}_4$ vérifiant $(*)$] $\Longleftrightarrow$ [$M\Lambda = G$ admet une solution]

$\Longleftrightarrow$ [M est inversible] $\Longleftrightarrow$ [M est injective]

$\Longleftrightarrow$ [si $M\Lambda = 0$ alors $\Lambda = 0$]

$\Longleftrightarrow$ [à l'unicité d'un polynôme $P \in \mathcal{P}_4$ vérifiant $(*)$].

Ainsi, d'après l'unicité, démontrée à l'étape précédente, on a : il existe $P \in \mathcal{P}_4$ vérifiant $(*)$.

2 – Soit W le polynôme d'interpolation d'Hermite vérifiant :

$$(**) \quad \begin{cases} W(x_0)=0, & W(x_1)=0, \quad W(x_2)=1, \\ W'(x_0)=0, & W'(x_1)=0 \text{ et } W'(x_2)=0 \end{cases}$$

2–a Montrons que $W(x)=\alpha(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-\beta)$ et que $\alpha\neq 0$ et $\beta\notin[x_0,x_2]$.

Le nombre de points d'interpolation étant égal à 3, nous savons d'après l'interpolation d'Hermite que $W\in\mathcal{P}_5$. Par ailleurs, puisque x_0 et x_1 sont des racines doubles de l'équation $W(x)=0$, alors on a

$$W(x)=\alpha(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-\beta)$$

où α et β sont des constantes. Il est clair que $\alpha\neq 0$, puisque $W(x_2)=1$.
(β étant l'autre racine de W)

Montrons que $\beta\notin[x_0,x_2]$. Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons que $\beta\in[x_0,x_2]$. On distingue alors 3 cas. (il est clair que $\beta\neq x_2$, car $W(x_2)=1$)

1er cas : si $\beta=x_0$, alors $W(x)=\alpha(x-x_0)^3(x-x_1)^2$ et donc

$$W'(x)=3\alpha(x-x_0)^2(x-x_1)^2+2\alpha(x-x_0)^3(x-x_1)$$
$$=\alpha(x-x_0)^2(x-x_1)\big[3(x-x_1)+2(x-x_0)\big].$$

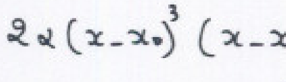
Or $W'(x_2)=0$, d'où nécessairement

$$3(x_2-x_1)+2(x_2-x_0)=0,$$

puisque $\alpha\neq 0$, $x_2\neq x_0$ et $x_2\neq x_1$. Ainsi $x_2=\frac{3}{5}x_1+\frac{2}{5}x_0$, qui est une combinaison convexe de x_0 et x_1. Ainsi $x_2\in[x_0,x_1]$, ce qui est absurde, puisque par hypothèse on a $x_0<x_1<x_2$. Ainsi $\beta\neq x_0$.

2ème cas : si $\beta=x_1$, alors on démontre de même que c'est absurde, puisque x_0 et x_1 "jouent le même" rôle dans le polynôme W. Ainsi $\beta\neq x_1$

3ème cas : si $\beta\in[x_0,x_2[\setminus\{x_0,x_1\}$.



Supposons que $\beta\in]x_0,x_1[$. Puisque $W(x_0)=W(\beta)=0$, alors, d'après le théorème de Rolle, il existe $t_0\in]x_0,\beta[$ tel que $W'(t_0)=0$.

De même, on a : il existe $t_1\in]\beta,x_1[$ tel que $W'(t_1)=0$, puisque $W(x_1)=W(\beta)=0$

Par ailleurs, par hypothèse, W' s'annule en x_0, x_1 et x_2. Ainsi W' s'annule en cinq points distincts. Or $W' \in \mathcal{P}_4$, et par suite on a $W' = 0$, donc $W = \text{cte}$, et comme $W(x_0) = 0$, alors $W \equiv 0$, ce qui est absurde, puisque $W(x_2) = 1 \neq 0$

lorsque $\beta \in]x_1, x_2[$, le même raisonnement conduit à une absurdité.

Ainsi, $\beta \notin [x_0, x_2]$.

2_b D'après 2_a, on a $W(x) = \alpha (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 (x-\beta)$, où $\alpha \neq 0$ et $\beta \notin [x_0, x_2]$.

Et par suite $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}$.

2_c Soit P le polynôme introduit en 1_ : $P(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1$
$P'(x_i) = g'(x_i)$, $i = 0, 1, 2$.

Soit $t \in [x_0, x_2]$. Montrons qu'il existe $\xi = \xi(t) \in]x_0, x_2[$ tel que

$$(*). \qquad g(t) - P(t) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{W^{(5)}(\xi)} W(t) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{120} (t-x_0)^2 (t-x_1)^2 (t-\beta)$$

[La deuxième égalité découle immédiatement de l'expression de W].

. Si $t = x_0$ ou $t = x_1$, alors d'une part $g(t) - P(t) = 0$ et d'autre part $W(t) = 0$, Ainsi $(*)$ est trivialement vérifiée, d'ailleurs pour tout ξ.

. Soit alors $t \in [x_0, x_2] \setminus \{x_0, x_1\}$. Considérons la fonction G définie par

$$G(x) = g(x) - P(x) - \frac{g(t) - P(t)}{W(t)} W(x).$$

On a $G(t) = 0$, $G(x_0) = G(x_1) = 0$, d'où G s'annule en trois points distincts. Et par suite, d'après le théorème de Rolle, G' s'annule en deux points distincts (qui sont distincts de x_0, x_1 et x_2). Par ailleurs, on a

$$G'(x) = g'(x) - P'(x) - \frac{g(t) - P(t)}{W(t)} W'(x).$$

Or $g'(x_i) = P'(x_i)$ et $W'(x_i) = 0$ pour $i = 0, 1, 2$. Ainsi G' s'annule en x_0, x_1 et x_2.

Ainsi, d'après ce qui précède, G' s'annule en cinq points distincts, et donc G'' s'annule en 4 points distincts (par application du théorème de Rolle).

En itérant le même procédé sur les dérivées de G jusqu'à l'ordre 5, et en utilisant le théorème de Rolle, on obtient :

$$\exists\ \xi = \xi_t \in]x_0, x_2[\text{ tel que : } G^{(5)}(\xi) = 0.$$

Or $G^{(5)}(\xi) = g^{(5)}(\xi) - P^{(5)}(\xi) - \dfrac{g(t)-P(t)}{W(t)} W^{(5)}(\xi)$

et $P^{(5)}(\xi)=0$, puisque $P \in \mathcal{P}_4$.

On obtient alors : $g(t) - P(t) = \dfrac{g^{(5)}(\xi)}{W^{(5)}(\xi)} W(t)$, où $\xi = \xi_t \in]x_0, x_2[$.

ce qui prouve la première égalité de $(*)$.

utilisant l'expression de W : $W(t) = \alpha(t-x_0)^2(t-x_1)^2(t-\beta) = \alpha t^5 + \ldots\ldots$

on a $W^{(5)}(t) = 120\alpha$. Et par suite, on obtient :

$$\begin{aligned} g(t) - P(t) &= \frac{g^{(5)}(\xi)}{W^{(5)}(\xi)} W(t) \\ &= \frac{g^{(5)}(\xi)}{120\alpha} \alpha (t-x_0)^2 (t-x_1)^2 (t-\beta) \\ &\underset{\alpha \neq 0}{=} \frac{g^{(5)}(\xi)}{120} (t-x_0)^2 (t-x_1)^2 (t-\beta). \end{aligned}$$

■

Problème 3

Q_n : suite de Polynômes orthogonaux sur $[a,b]$ relativement à la fonction poids ω.

$d^\circ Q_n = n$; Q_n est monique.

1- On pose $Q_n(x) \times \omega(x) = \dfrac{d^n U_n(x)}{dx^n}$.

1-a. on a $\dfrac{1}{\omega(x)} \cdot \dfrac{d^n U_n(x)}{dx^n} = Q_n(x)$. Et comme $d^\circ Q_n = n$ alors $\dfrac{d^{n+1} Q_n}{dx^{n+1}} = 0$.

Ainsi U_n vérifie l'éq. diff:

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\frac{1}{\omega(x)} \cdot \frac{d^n U_n(x)}{dx^n}\right] = 0.$$

Soit p un polynôme de $d^\circ \leq n-1$.

On a: $(Q_n, p)_\omega = 0$ i.e $\displaystyle\int_a^b p(x) Q_n(x)\,\omega(x)\,dx = \int_a^b \frac{d^n U_n(x)}{dx^n} p(x)\,dx = 0$

utilisant une intégration par partie, on obtient:

$$-\int_a^b \frac{d^{n-1}U_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dp}{dx}\,dx + \left[\frac{d^{n-1}U_n}{dx^{n-1}} \times p\right]_a^b = 0$$

par une 2ème intégration par partie, on obtient:

$$+\int_a^b \frac{d^{n-2}U_n}{dx^{n-2}} \cdot \frac{d^2p}{dx^2}\,dx - \left[\frac{d^{n-2}U_n}{dx^{n-2}} \cdot \frac{dp}{dx}\right]_a^b + \left[\frac{d^{n-1}U_n}{dx^{n-1}} \cdot p\right]_a^b = 0$$

Ainsi de suite, ..., on obtient (facilement) par récurrence (en utilisant des intégrations par partie, et le fait que $\frac{d^n p}{dx^n} = 0$) :

$$\left[\frac{d^{n-1}U_n}{dx^{n-1}} p - \frac{d^{n-2}U_n}{dx^{n-2}} \cdot \frac{dp}{dx} + \cdots + (-1)^{n-1} U_n \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right]_a^b = 0$$

* On suppose dans toute la suite que U_n vérifie :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} U_n(a) = U_n'(a) = \cdots = U_n^{(n-1)}(a) = 0 & \text{i.e } a \text{ est un zéro de } U_n \text{ de multiplicité } n \\ U_n(b) = U_n'(b) = \cdots = U_n^{(n-1)}(b) = 0 & \text{i.e } b \text{ est un zéro de } U_n \text{ de multiplicité } n \end{cases}$$

1-b $Q_n(x) = x^n + p(x)$; $p \in \mathcal{P}_{n-1}$. $\gamma_n = \displaystyle\int_a^b [Q_n(x)]^2 \omega(x)\,dx$.

$$\gamma_n = \int_a^b [x^n + p(x)] \cdot Q_n(x)\,\omega(x)\,dx = \int_a^b x^n Q_n(x)\,\omega(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b p(x) Q_n(x)\,\omega(x)\,dx}_{=0}$$

Ainsi $\gamma_n = \displaystyle\int_a^b x^n Q_n(x)\,\omega(x)\,dx$

Et par suite $\gamma_n = \int_a^b x^n \cdot \frac{d^n u_n}{dx^n}\,dx = -n\int_a^b x^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}u_{n-1}}{dx^{n-1}}\,dx + \underbrace{\left[x^n \cdot \frac{d^{n-1}u_{n-1}}{dx^{n-1}}\right]_a^b}_{=0 \text{ d'après (II)}}$

$$= n(n-1)\int_a^b x^{n-2} \cdot \frac{d^{n-2}u_{n-2}}{dx^{n-2}}\,dx - n\underbrace{\left[x^{n-1}\,\frac{d^{n-2}u_{n-2}}{dx^{n-2}}\right]_a^b}_{=0 \text{ d'après (II)}}$$

= (etc, par récurrence, et en utilisant (II))

$$=(-1)^n n! \int_a^b u_n(x)\,dx. \quad \Rightarrow \gamma_n = (-1)^n n! \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

2- (III) $\begin{cases} Q_0(x) = 1 \end{cases}$; $Q_n(x) = (x-\alpha_n)\,Q_{n-1}(x) - \beta_n\,Q_{n-2}(x)$; $n \geq 1$

où $\beta_n = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}$; $\alpha_n = \frac{(x Q_{n-1}, Q_{n-1})_w}{\gamma_{n-1}}$; $\gamma_n = (Q_n, Q_n)_w$; On pose $Q_{-1}(x) \equiv 0$

En remplaçant n par k dans III on obtient:

$$Q_k(x) = (x-\alpha_k)\,Q_{k-1}(x) - \beta_k\,Q_{k-2}(x)$$

d'où

$$(1) \quad \frac{Q_k(x)\,Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}} = \frac{(x-\alpha_k)}{\gamma_{k-1}} Q_{k-1}(x)\,Q_{k-1}(y) - \frac{\beta_k\,Q_{k-2}(x)\,Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}}$$

En échangeant le rôle de x et de y dans la dernière égalité, on obtient:

$$(2) \quad \frac{Q_k(y)\,Q_{k-1}(x)}{\gamma_{k-1}} = \frac{(y-\alpha_k)}{\gamma_{k-1}} Q_{k-1}(x)\,Q_{k-1}(y) - \frac{\beta_k}{\gamma_{k-1}} Q_{k-2}(y)\,Q_{k-1}(x)$$

$\frac{\beta_k}{\gamma_{k-1}} = \frac{1}{\gamma_{k-2}}$; En retranchant (2) de (1) on obtient

$$\frac{Q_k(x)\,Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}} - \frac{Q_k(y)\,Q_{k-1}(x)}{\gamma_{k-1}} = \frac{(x-y)}{\gamma_{k-1}} \cdot Q_{k-1}(x)\,Q_{k-1}(y) - \frac{1}{\gamma_{k-2}} Q_{k-2}(x)\,Q_{k-1}(y) + \frac{1}{\gamma_{k-2}} Q_{k-2}(y)\,Q_{k-1}(x)$$

D'où

$$\frac{Q_{k-1}(x)\,Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}} = \frac{Q_k(x)\,Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}\cdot(x-y)} - \frac{Q_k(y)\,Q_{k-1}(x)}{\gamma_{k-1}\cdot(x-y)} + \frac{1}{\gamma_{k-2}}\left[Q_{k-2}(x)\,Q_{k-1}(y) - Q_{k-2}(y)\,Q_{k-1}(x)\right] \times \frac{1}{x-y}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{Q_{k-1}(x)\,Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(x-y)} \times \left[\frac{Q_k(x)Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-1}} - \frac{1}{\gamma_{k-2}}\,Q_{k-2}(y)\,Q_{k-1}(x)\right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x-y} \times \left[\frac{Q_{k-2}(x)\,Q_{k-1}(y)}{\gamma_{k-2}} - \frac{Q_k(y)\,Q_{k-1}(x)}{\gamma_{k-1}}\right]$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{\gamma_k} = \frac{1}{x-y}\left[\frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y)}{\gamma_n} - \frac{1}{\gamma_{-1}}\underbrace{Q_{-1}(y)}_{=0}Q_0(x)\right]$$

$$+\frac{1}{x-y}\left[\frac{\overset{=0}{Q_{-1}(x)}Q_0(y)}{\gamma_{-1}} - \frac{Q_{n+1}(y)Q_n(x)}{\gamma_n}\right]$$

et par suite, on obtient ~~la~~ l'égalité de Christoffel-Darboux :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{\gamma_k} = \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)}{(x-y)\cdot\gamma_n}$$

3- $\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\,w(x)\,dx$; $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{Q_n(x)}{(x-x_i)\,Q_n'(x_i)}$; $1\leq i\leq n$

x_i : les n racines réelles et distinctes de Q_n. $(Q_n(x_i)=0)$

$$\lambda_i = \int_a^b \frac{Q_n(x)}{(x-x_i)\,Q_n'(x_i)}\cdot w(x)\,dx = \frac{1}{Q_n'(x_i)}\int_a^b \frac{Q_n(x)}{x-x_i}\cdot w(x)\,dx$$

En remplaçant y par x_i dans l'égalité de Christoffel-Darboux, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(x_i)}{\gamma_k} = \frac{Q_{n+1}(x)\overset{=0}{Q_n(x_i)} - Q_n(x)\cdot Q_{n+1}(x_i)}{(x-x_i)\,\gamma_n} = -\frac{Q_n(x)\cdot Q_{n+1}(x_i)}{(x-x_i)\,\gamma_n}$$

D'où $\frac{Q_n(x)}{x-x_i} = -\frac{\gamma_n}{Q_{n+1}(x_i)}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{Q_k(x)\,Q_k(x_i)}{\gamma_k}$. Et par suite, on a

$$\lambda_i = \frac{1}{Q_n'(x_i)}\times\frac{-\gamma_n}{Q_{n+1}(x_i)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\gamma_k}\int_a^b Q_k(x)\,Q_k(x_i)\,w(x)\,dx$$

$$= \frac{-\gamma_n}{Q_n'(x_i)\cdot Q_{n+1}(x_i)}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k(x_i)}{\gamma_k}\underbrace{\int_a^b \overset{Q_0(x)}{1}\times Q_k(x)\,w(x)\,dx}_{=(Q_k,Q_0)_w \underset{k\geq 1}{=} 0} + \underbrace{\frac{\overset{1}{Q_0(x_i)}}{\gamma_0}\underbrace{\int_a^b Q_0(x)\,w(x)\,dx}_{\gamma_0}}_{=1}\right]$$

Ainsi $\lambda_i = \frac{-\gamma_n}{Q_n'(x_i)\cdot Q_{n+1}(x_i)}$

Par ailleurs, on a $Q_{n+1}(x_i) = (x_i - \alpha_{n+1})\overset{=0}{Q_n(x_i)} - \beta_{n+1}Q_{n-1}(x_i)$

$$= -\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}Q_{n-1}(x_i) \Longrightarrow -\frac{\gamma_n}{Q_{n+1}(x_i)} = \frac{\gamma_{n-1}}{Q_{n-1}(x_i)}$$

Ainsi

$1\leq i\leq n$; $\lambda_i = \frac{-\gamma_n}{Q_n'(x_i)\cdot Q_{n+1}(x_i)} = \frac{\gamma_{n-1}}{Q_n'(x_i)\,Q_{n-1}(x_i)}$

4- $a = -1$, $b = 1$ $\omega(x) = 1$ sur $[-1, 1]$

4-a, on a d'après (I) : $\dfrac{d^{2n+1}U_n(x)}{dx^{2n+1}} = 0 \Rightarrow U_n \in \mathcal{P}_{2n}$

on a d'après (II) : -1 est une racine de multiplicité n de U_n

1 est " " " " " U_n

Ainsi $U_n = K_n \cdot (x+1)^n \cdot (x-1)^n = K_n \cdot (x^2-1)^n$; où $K_n =$ cte arbitraire indépendante de x.

$$* \quad Q_n(x) = \frac{d^n U_n}{dx^n} = K_n \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n \times (x+1)^n\right]$$

$$= K_n \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left((x-1)^n\right) \times \frac{d^k}{dx^k}\left((x+1)^n\right)$$

$$= K_n \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot n(n-1)\ldots(n-(n-k)+1) \cdot (x-1)^{n-k} \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)(x+1)^k$$

or $n(n-1)\ldots\underbrace{(n-(n-k)+1)}_{(k+1)} \cdot \underbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}_{= k!\, C_n^k} = n(n-1)\ldots(k+1) \cdot k! \cdot C_n^k = n!\, C_n^k$

Ainsi $$Q_n(x) = K_n \cdot n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k \qquad n \geq 1$$

Par ailleurs, comme Q_n est monique, i.e. que le coef. de x^n dans Q_n est égal à 1, on en déduit que :

$$1 = K_n \cdot n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = K_n \cdot n!\ C_{2n}^n$$

D'où

$$K_n = \frac{1}{n!\, C_{2n}^n}.$$

4-b Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$

On a $\gamma_n = (-1)^n\, n! \displaystyle\int_a^b U_n(x)\, dx = (-1)^n\, n!\, K_n I_n$

$$= (-1)^n \cdot n!\, \frac{1}{n!\, C_{2n}^n} \times \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^2}{C_{2n}^n\, (2n+1)!}$$

$$= \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^2}{(2n)!\, (2n+1)!} \times n! \cdot n! \quad ; \quad \gamma_n = \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^4}{(2n)!\, (2n+1)!} \qquad n \geq 1$$

4-c

$$Q_n(x) = (x-\alpha_n)\,Q_{n-1}(x) - \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}\,Q_{n-2}(x)$$

$$\alpha_n = \frac{(x\,Q_{n-1}, Q_{n-1})_\omega}{\gamma_{n-1}} \quad ; \quad (x\,Q_{n-1}, Q_{n-1})_\omega = \int_{-1}^{1} x \cdot Q_{n-1}^2(x)\, dx$$

or $Q_{n-1}^2(x)$ est un polynôme de degré $2n-2$,

d'où $x\,Q_{n-1}^2(x)$ est un polynôme de degré $2n-1$ (impair)

et par suite $\alpha_n = 0$.

$$\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}} = \frac{2^{2n-1}\cdot[(n-1)!]^4}{(2n-2)!\,(2n-1)!} \times \frac{(2n-4)!\,(2n-3)!}{2^{2n-3}\,[(n-2)!]^4} = $$

$$= 2^2\cdot(n-1)^4\cdot\frac{(2n-4)!\,(2n-3)!}{(2n-2)!\,(2n-1)!} = 2^2\,(n-1)^4 \times \frac{1}{(2n-2)(2n-3)(2n-1)(2n-2)}$$

$$= 2^2\cdot(n-1)^4 \times \frac{1}{2^2\cdot(n-1)^2\cdot(2n-1)(2n-3)}$$

$$= \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)}$$

Ainsi

$$Q_n(x) = x\,Q_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)}\,Q_{n-2}(x)$$

4-d on a : $(1-x^2)\,Q_n'(x) = (n+1)\,x\,Q_n(x) - (2n+1)\,Q_{n+1}(x)$

$$(1-x_i^2)\,Q_n'(x_i) = (n+1)\,x_i\,\underbrace{Q_n(x_i)}_{=0} - (2n+1)\,Q_{n+1}(x_i) = -(2n+1)\,Q_{n+1}(x_i)$$

$$\Rightarrow Q_n'(x_i) = \frac{-(2n+1)\,Q_{n+1}(x_i)}{(1-x_i^2)}$$

$$\lambda_i = \frac{\gamma_{n-1}}{Q_n'(x_i)\cdot Q_{n-1}(x_i)}$$

$$= \frac{\gamma_{n-1} \times (1-x_i^2)}{-(2n+1)\,Q_{n+1}(x_i)\cdot Q_{n-1}(x_i)}$$

or $Q_{n+1}(x_i) = x_i\,\underbrace{Q_n(x_i)}_{=0} - \dfrac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}\,Q_{n-1}(x_i)$

$$\lambda_i = \frac{\gamma_{n-1}\cdot(1-x_i^2)\cdot(2n+1)(2n-1)}{(2n+1)\cdot n^2\cdot Q_{n-1}^2(x_i)} \Rightarrow \lambda_i = \frac{2n-1}{n^2}\,\frac{\gamma_{n-1}}{Q_{n-1}^2(x_i)}\cdot(1-x_i^2) \quad 1\le i\le n$$

4-e On pose :

$$\theta_n(x) = \mu_n\, Q_n(x) \qquad n \geq 1 \qquad \text{(polynômes de Legendre)}$$
$$\theta_n(1) = 1$$

$$\mu_n = \frac{\theta_n(1)}{Q_n(1)} = \frac{1}{Q_n(1)} \;;$$

$$Q_n(1) = K_n \cdot n! \left[\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k \right](1)$$

$$= K_n \cdot n! \,(C_n^n)^2 \left[(x+1)^n\right](1) = K_n\, n! \underbrace{(C_n^n)^2}_{=1} 2^n = \frac{2^n}{C_{2n}^n}$$

$$\mu_n = \frac{C_{2n}^n}{2^n}$$

$$\|\theta_n\|_w^2 = \|\mu_n Q_n\|_w^2 = (\mu_n)^2 \|Q_n\|_w^2 = (\mu_n)^2 \gamma_n = \frac{(C_{2n}^n)^2}{(2^n)^2} \cdot \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!\; C_{2n}^n}$$

$$= C_{2n}^n \times 2 \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{2 \times (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\|\theta_n\|_w^2 = \frac{2}{2n+1} .$$

$$\theta_0(x) = \mu_0 = 1.$$

$$\theta_n(x) = \mu_n \cdot Q_n(x) = \mu_n\, x\, Q_{n-1}(x) - \mu_n \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} Q_{n-2}(x)$$

$$= x\, \theta_{n-1}(x) \cdot \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} \frac{\mu_n}{\mu_{n-2}} \theta_{n-2}(x)$$

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = \frac{C_{2n}^n}{2^n} \times \frac{2^{n-1}}{C_{2n-2}^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,.\,n!} \times \frac{(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!} =$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{2n(2n-1)}{n.\, n} = \frac{2n-1}{n} \qquad \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = \frac{2n-1}{n}$$

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-2}} = \frac{C_{2n}^n}{2^n} \cdot \frac{2^{n-2}}{C_{2n-4}^{n-2}} = \frac{1}{2^2} \frac{(2n)!}{n!\; n!} \; \frac{(n-2)!\,(n-2)!}{(2n-4)!} = \frac{1}{2^2} \, \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{n^2(n-1)(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \, \frac{(2n-1) \,.\, 2(n-1)(2n-3)}{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \times (2n-1)(2n-3) = \frac{\mu_n}{\mu_{n-2}}$$

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-2}} \cdot \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} = \frac{n-1}{n}$$

Ainsi

[illegible]

$$\lambda_i = \frac{2n-1}{n^2} \frac{\gamma_{n-1}}{\left[Q_{n-1}(x_i)\right]^2} (1-x_i^2)$$

μ_{n-1}

$$\lambda_i = \frac{2n-1}{n^2} \frac{1}{\mu_{n-1}^2} \cdot \frac{2}{2n-1} \cdot \frac{\mu_{n-1}^2}{\theta_{n-1}^2(x_i)} \cdot (1-x_i^2)$$

$$\lambda_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2 \theta_{n-1}^2(x_i)} \qquad 1 \leq i \leq n$$