Université de Tunis El Manar

المدرسة الوطنية للمهندسين بتونس

Ecole nationale d'ingénieurs de Tunis

Recueil d'Examens
(1997 - 2009)

Analyse Numérique

Niveau : Formation Ingénieur

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
B.P. 37 – 1002 Le Belvédère Tunis – Tunisie
Tél. (+216) 71 874 700 Fax : (+216) 71 872 729 http://www.enit.rnu.tn

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – Analyse Numérique — Date : 11 mars 1998

Enseignants : H. BOUHAFA – H. CHAKER – H. EL FEKIH — Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC - GE - GI - GM** — **Documents non autorisés**

Exercice : Soit $g : [a,b] \to [a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 telle que $M \equiv \max\limits_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$.

1– On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$x_0 \in [a,b], \quad x_{n+1} = g(x_n), \quad n \geq 0$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique point fixe α de g.

2– Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe ε_n tel que

$$e_{n+1} = (g'(\alpha) + \varepsilon_n)e_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

où $e_n = x_n - \alpha$.

3– On considère la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}, \quad n \geq 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0$

4– Comparer la vitesse de convergence des deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$.

Problème : On considère la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $k+1$ points, $k \geq 0$, donnée par :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i) + E(f) \qquad (1)$$

où nous avons désigné par :

- $E(f)$ le terme d'erreur (on ne s'intéresse pas ici à l'étude de $E(f)$);
- x_i, $0 \leq i \leq k$, les nœuds d'intégration vérifiant : $-1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_k < 1$;
- λ_i, $0 \leq i \leq k$, les poids d'intégration.

On rappelle que $x_0, \ldots, x_k$ sont les $k+1$ racines du $(k+2)$-ième polynôme orthogonal de Legendre $Q_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1}$ (qui est unitaire) associé à la fonction poids $w \equiv 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Le but de ce problème est de calculer les $(k+1)$ nœuds $x_0, \ldots, x_k$ ainsi que les $k+1$ poids $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ de la formule de quadrature de Gauss-Legendre donnée par (1).

Le problème est divisé en trois parties. La première est une étape préliminaire, la deuxième concerne le calcul des nœuds x_i et la dernière porte sur le calcul des poids λ_i.

Partie I : Soient $r_0 < r_1 < \cdots < r_m$, $(m+1)$ réels, $m > 0$, et $P \in \mathcal{P}_{m+1}$ le polynôme défini par $P(x) = (x - r_0)(x - r_1) \cdots (x - r_m)$.

On considère la méthode de Newton appliquée à la résolution de l'équation $P(x) = 0$. On rappelle que cette méthode génère la suite définie par :

$$t_0 \text{ donné}, \quad t_{\ell+1} = t_\ell - \frac{P(t_\ell)}{P'(t_\ell)}, \quad \ell \geq 0$$

On suppose que $t_0 > r_m$.

I.1– Montrer que $\forall \ell$, $t_\ell > r_m$ et que la suite $(t_\ell)_{\ell\geq 0}$ est décroissante.

I.2– En déduire que la suite $(t_\ell)_{\ell\geq 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{\ell\to+\infty} t_\ell = r_m$.

Partie II : On considère le $(k+2)$-ième polynôme orthogonal (de Legendre) Q_{k+1} associé à la fonction poids $w \equiv 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, et ses $(k+1)$ racines notées $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$.

II.1– Montrer que la méthode de Newton appliquée à Q_{k+1}, avec une initialisation $t_0 > x_k$, génère une suite $(t_\ell)_{\ell \geq 0}$ qui converge vers x_k.

II.2– On suppose que les racines $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_j$ $(1 < j \leq k)$ de Q_{k+1} ont été déjà calculées et on se propose de calculer x_{j-1}.

On considère le polynôme $R_j \in \mathcal{P}_j$ défini par : $R_j(x) = Q_{k+1}(x) / \prod_{i=j}^{k}(x - x_i)$

Montrer que la méthode de Newton appliquée au polynôme R_j, avec une initialisation $t_0 = x_j$, génère une suite $(t_\ell)_{\ell \geq 0}$ qui converge vers x_{j-1}.

II.3– En déduire un algorithme qui permet de calculer les $(k+1)$ racines $x_0, x_1, \ldots, x_k$ de Q_{k+1}.

Partie III : On s'intéresse dans cette partie au calcul des poids λ_i intervenant dans la formule de Gauss-Legendre donnée par (1). Rappelons que cette formule est de degré $2k+1$.

Montrer que les poids λ_i, $i = 0, \ldots, k$, sont donnés par

$$\lambda_i = \frac{1}{Q'_{k+1}(x_i)} \int_{-1}^{1} \frac{Q_{k+1}(x)}{x - x_i}\, dx$$

□

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE — Date : 17 mars 1999

Enseignants : H. CHAKER – H. EL FEKIH – H. RIAHI — Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC - GE - GI - GM** — **Documents non autorisés**

Exercice 1

1– Etudier les variations de $f(x) = x\exp(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui même.

Etant donné $a > 0$, on notera $\alpha > 0$ l'unique solution de $f(x) = a$.

2– Soit N la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$N(x) = x - \frac{f(x) - a}{f'(x)}$$

2–a Montrer que, pour tout $x \geq 0$, il existe $c \in I(\alpha, x)$ tel que

$$N(x) = \alpha + \frac{1}{2}(\alpha - x)^2 \frac{f''(c)}{f'(x)}$$

où $I(\alpha, x)$ désigne l'intervalle fermé d'extrémités α et x.

2–b En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a $N(x) \geq \alpha$.

3– Notons $x_0 \geq \alpha$ un réel donné et, pour tout $k \geq 0$, $x_{k+1} = N(x_k)$.

3–a Montrer que la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ est décroissante, qu'elle converge et calculer sa limite.

3–b Montrer que, pour tout $x \geq \alpha$, on a $N(x) - \alpha \leq (\alpha - x)^2$.

3–c En déduire que, pour tout $k \geq 0$, $x_k - \alpha \leq (x_0 - \alpha)^{2^k}$.

Exercice 2

Soit a et b deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3.
On souhaite approcher $D_2 f \equiv f''(\frac{a+b}{2})$ par une expression du type :

$$\Delta_2 f \equiv \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(\frac{a+b}{2}) + \lambda_2 f(b)$$

de telle sorte que $E(f) \equiv D_2 f - \Delta_2 f$ vérifie :

$$(1) \qquad \forall P \in \mathcal{P}_2, \qquad E(P) \equiv D_2 P - \Delta_2 P = 0$$

On supposera dans toute la suite que les réels λ_0, λ_1 et λ_2 sont tels que la propriété (1) soit vérifiée.

1– Montrer que $f[a, \frac{a+b}{2}, b] = \frac{1}{2}\Delta_2 f$, où $f[a, \frac{a+b}{2}, b]$ désigne la différence divisée d'ordre 2 de f aux points $a, \frac{a+b}{2}, b$.

2– Soit P_f le polynôme d'interpolation de Lagrande de f aux points $a, \frac{a+b}{2}, b$ et $r(x) = f(x) - P_f(x)$.

2–a Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $r''(c) = 0$.

2–b Montrer que $E(f) = r''(\frac{a+b}{2})$.

2–c En déduire que

$$|E(f)| \leq \frac{b-a}{2} \sup_{x\in[a,b]} |f'''(x)|$$

3– Calculer les réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ en fonction de a et b pour que la propriété (1) soit vérifiée.

■

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 3 avril 2000

Enseignants : H. BOUHAFA–H. CHAKER – H. EL FEKIH – H. RIAHI Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC - GE - GI - GM** **Documents non autorisés**

On considère le problème de Cauchy pour une équation différentielle du second ordre

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t)), & t \in I_0 =]t_0, t_0 + T[\\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = z_0. \end{cases}$$

où y_0, z_0 sont donnés dans $\mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que la fonction f est de classe C^2 de $I_0 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie la condition de Lipschitz:

$$\exists L > 0, \forall t \in I_0, \forall y, z \in \mathbb{R} \qquad |f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$$

et que la solution $y(t)$ de (1) est de classe C^4.
Pour résoudre le problème (1), on introduit une subdivision uniforme de I_0

$$t_n = t_0 + nh, \quad 0 \leq n \leq N, \quad h = \frac{T}{N}$$

on note $(y_n, z_{n+1/2})$ une approximation du couple $(y(t_n), y'(t_{n+1/2}))$ où on a noté $t_{n+1/2} = t_0 + (n + \frac{1}{2})h$.
On considère alors le schéma explicite

$$(2) \qquad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_{n+1/2} \\ z_{n+3/2} = z_{n+1/2} + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}, \quad n \geq 0, \quad (y_0, z_{1/2}) \text{ donnés.}$$

1. **Etude de la consistance et de l'ordre**

   (a) On pose
   $$\varepsilon_{n+1/2} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_{n+1/2}), \quad n \geq 0$$
   En utilisant un développement de Taylor au point $t_{n+1/2}$, montrer que:
   $$|\varepsilon_{n+1/2}| = O(h^3)$$
   (i.e. $\exists c > 0$; $|\varepsilon_{n+1/2}| \leq ch^3$)

   (b) On pose
   $$\eta_n = y'(t_{n+1/2}) - y'(t_{n-1/2}) - hf(t_n, y(t_n)), \quad n \geq 1.$$
   En utilisant un développement de Taylor au point t_n, montrer que:
   $$|\eta_n| = O(h^3)$$

2. **Etude de la convergence**

   (a) On pose
   $$\alpha_n = y(t_n) - y_n.$$
   $$\beta_{n+1/2} = y'(t_{n+1/2}) - z_{n+1/2}.$$
   Montrer que
   $$|\alpha_{n+1}| \le |\alpha_n| + h|\beta_{n+1/2}| + |\varepsilon_{n+1/2}|$$
   $$|\beta_{n+3/2}| \le |\beta_{n+1/2}| + hL|\alpha_{n+1}| + |\eta_{n+1}|.$$

   (b) On pose
   $$\xi_n = |\alpha_n| + |\beta_{n+1/2}|.$$
   Montrer que, pour $h \le T$, on a :
   $$|\xi_{n+1}| \le (1 + \Lambda h)|\xi_n| + \varphi_n$$
   où
   $$\Lambda = \max(L, 1 + LT), \quad \varphi_n = (1 + LT)|\varepsilon_{n+1/2}| + |\eta_{n+1}|.$$

   (c) En déduire que
   $$|\xi_n| \le |\xi_0| exp(\Lambda(t_n - t_0)) + \frac{exp(\Lambda(t_n - t_0)) - 1}{\Lambda h} \max_{0 \le k \le n-1} \varphi_k.$$
   (Indication: on pourra utiliser l'inégalité $1 + k < exp(k)$)

   (d) Choisir alors $z_{1/2}$ de façon qu'on ait
   $$\max_{0 \le n \le N-1} |\xi_n| = O(h^2).$$

E.N.I.T. **14 juillet 2000**

Examen – Session de rattrapage
ANALYSE NUMÉRIQUE

Enseignants : H. BOUHAFA–H. CHAKER – H. EL FEKIH – H. RIAHI Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC - GE - GI - GM** **Documents non autorisés**

Exercice 1

Soit $f \in C^2([-1,1])$ et P le polynôme d'interpolation d'Hermite de f au point -1 vérifiant :

$$P(-1) = f(-1) \qquad \text{et} \qquad P'(-1) = f'(-1)$$

1– Déterminer l'expression de P.
2– On considère la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f'(-1) + E(f) \tag{1}$$

2–a Déterminer α_0 et α_1 pour que la formule (1) soit de degré au moins 1.
2–b Montrer qu'il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que $E(f) = \frac{4}{3} f''(\eta)$.

Indication : On rappelle que pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $\xi_t \in [-1,1]$, dépendant de t, tel que $f(t) - P(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 f''(\xi_t)$.

Exercice 2

1– Soit $B = (b_{ij})$ une matrice à n lignes et n colonnes, à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{array}{ll} b_{ij} \geq 0 & ;\ 1 \leq i,j \leq n \\ \sup\limits_{1\leq i\leq n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\right) < 1 & \end{array}$$

Montrer que $I - B$ est inversible et que $(I - B)^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls (I désigne la matrice identité).

2– Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et n colonnes, à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{array}{ll} a_{ii} > 0 & ;\ 1 \leq i \leq n \\ a_{ij} \leq 0 & ;\ 1 \leq i \neq j \leq n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} > 0 & ;\ 1 \leq i \leq n \end{array}$$

et soit D la matrice diagonale formée par la diagonale de A :$D_{ii} = a_{ii}$ pour $1 \leq i \leq n$, $D_{ij} = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$.

2–a Montrer que D est inversible. On pose alors $C = D^{-1}A$.
2–b Calculer les coefficients de la matrice C en fonction de ceux de A.
2–c Montrer que A est inversible et que les coefficients de la matrice A^{-1} sont positifs ou nuls.

Exercice 3

On se donne une matrice A réelle, symétrique définie positive à $n$lignes et n colonnes, et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.
On considère, pour $r > 0$ donné, la suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\begin{cases} x^{(o)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n & \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - r(Ax^{(k)} - b) & ,\ k \geq 0 \end{cases}$$

1– Montrer que si la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ alors on a $A\bar{x} = b$.
2– Montrer que pour $r \in]0, \dfrac{2}{\lambda_n}[$ la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. ($\lambda_n = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$.
3– En déduire un algorithme de résolution du système linéaire $Ax = b$.

E.N.I.T. **2000/2001**

Examen – Analyse Numérique — Date : 2 Avril 2001

Enseignants : H. CHAKER – H. EL FEKIH – M. JAOUA — Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC – GE – GI – GM** — **Documents non autorisés**

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) vérifiant :

$$|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-2}| < |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$$

On considère la matrice B définie par $B = A - \lambda_n u_n u_n^t$, où u_n est un vecteur propre de A associé à λ_n, tel que $\|u_n\|_2 = 1$.

1. Montrer que $Bu_n = 0$.

2. Montrer que $Bu_i = \lambda_i u_i$, $1 \leq i \leq n-1$, où u_i est un vecteur propre de A associé λ_i, $1 \leq i \leq n-1$.

3. En déduire une méthode qui permet de calculer λ_{n-1}.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles admettant chacune une factorisation "LU" :

$$A = L_A U_A, \quad \begin{array}{ll} L_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

$$B = L_B U_B, \quad \begin{array}{ll} L_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ définie (par blocs) comme suit :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right)$$

1. Montrer que M est inversible.

2. Montrer que M admet une factorisation LU unique.

3. Proposer alors une méthode pour résoudre le système linéaire $Mx = b$, où $b \in \mathbb{R}^{n+m}$ et donner le nombre d'opérations élémentaires.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le système linéaire

$$Ax = b \tag{1}$$

dont on notera $\bar{x}$ sa solution.

1. Montrer que la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive.

2. Pour résoudre le système (1), on considère la méthode du gradient à pas constant appliquée au système $A^T Ax = A^T b$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - rg^{(k)}, \quad k \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $g^{(k)} = A^T Ax^{(k)} - A^T b$.

2.a Montrer que la méthode du gradient à pas constant (2) est convergente, si et seulement si $0 < r < \dfrac{2}{\|A\|_2^2}$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_2$. Quelle est dans ce cas la limite de la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ définie par (2) ?

2.b Soit $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\frac{\|g^{(k)}\|_2}{\|A^T b\|_2} \leq \varepsilon \Longrightarrow \frac{\|x^{(k)} - \bar{x}\|_2}{\|\bar{x}\|_2} \leq \varepsilon[\mathrm{cond}_2(A)]^2$$

où $\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$ et $\bar{x}$ désigne la solution de (1).

2.c Ecrire l'algorithme de la méthode du gradient à pas constant appliquée au système $A^T Ax = A^T b$.

E.N.I.T. **2000/2001**

Examen – Analyse Numérique — Date : 13 Janvier 2001

Enseignant(s) : H. EL FEKIH — Durée : **1h30**

Classe : **1ère année INFO & TELEC** — **Documents non autorisés**

Exercice 1

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n points distincts de $[a,b] \subset \mathbb{R}$, et V la matrice :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1– Montrer, en utilisant l'interpolation de Lagrange, que V est inversible.

2– Soit $L_1, \cdots, L_n$ les polynômes de Lagrange aux points $x_1, \ldots, x_n$. On pose, pour $j = 1, \ldots, n$, $L_j(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_{ij} x^{i-1}$. Montrer que $V^{-1} = U$, où $U = (u_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in [a,b] \\ y(a) = Y_0 \end{cases}$$

où f est une fonction de $[a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzienne par rapport à y et de classe C^3. On notera Y la solution exacte de (E). Pour approcher l'équation différentielle (E), on propose le schéma numérique suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} y_0 = Y_0, \quad h = \dfrac{b-a}{N} \\ \\ y_{n+1} = y_n + \alpha h f(x_n, y_n) + \beta h^2 f^{(1)}(x_n + \lambda h, y_n + \lambda h f(x_n, y_n)), \quad n \ge 0 \end{cases}$$

où α, β et λ sont des réels ≥ 0, et x_n, $n = 0, \cdots, N$, $(N+1)$ points équidistants de $[a,b]$. On rappelle que $f^{(k)}$ est donnée par :

$$f^{(k)}(x,y) = \frac{\partial f^{(k-1)}(x,y)}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f^{(k-1)}(x,y)}{\partial y}, \quad k \ge 1, \text{avec } f^{(0)} = f$$

1– Montrer que si la fonction $f^{(1)}$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors le schéma (S) est stable.

2– A quelle condition le schéma (S) est-il consistant ?

3– Déterminer α, β et λ pour que le schéma (S) soit d'ordre (au moins) 3.

4– En déduire, que pour ce choix de α, β et λ , le schéma (S) est convergent. Donner alors une estimation de l'erreur $\max_n |y_n - Y(x_n)|$ en fonction de h.

Exercice 3

On se donne deux points distincts τ_1 et τ_2 dans l'intervalle [-1,1], et deux nombres réels non nuls ω_1 et ω_2. Soit la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \omega_1 f(\tau_1) + \omega_2 f(\tau_2) + E(f)$$

où $E(f)$ est le terme d'erreur.

1– Quelle condition doivent vérifier ω_1 et ω_2 pour que cette formule soit exacte pour les fonctions constantes ?

2– Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la formule soit exacte pour les polynômes impairs de degré inférieur ou égal 3 est que $\tau_1 = -\tau_2$ et $\omega_1 = \omega_2$.

3– En déduire les valeurs de τ_1, τ_2, ω_1 et ω_2 pour que la formule soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal 3. A quelle famille appartient la formule obtenue ?

E.N.I.T. **11 juillet 2001**

Examen – Session de rattrapage

ANALYSE NUMÉRIQUE

Enseignant(s) : H. EL FEKIH Durée : **1h30**

Classe : **1ère année INFO & TELEC** **Documents non autorisés**

Exercice

Soit a et b deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3.
On souhaite approcher $D_2 f \equiv f''(\frac{a+b}{2})$ par une expression du type :

$$\Delta_2 f \equiv \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(\frac{a+b}{2}) + \lambda_2 f(b)$$

de telle sorte que $E(f) \equiv D_2 f - \Delta_2 f$ vérifie :

$$(1) \qquad \forall P \in \mathcal{P}_2, \qquad E(P) \equiv D_2 P - \Delta_2 P = 0$$

On supposera dans toute la suite que les réels λ_0, λ_1 et λ_2 sont tels que la propriété (1) soit vérifiée.

1– Montrer que $f[a, \frac{a+b}{2}, b] = \frac{1}{2}\Delta_2 f$, où $f[a, \frac{a+b}{2}, b]$ désigne la différence divisée d'ordre 2 de f aux points $a, \frac{a+b}{2}, b$.

2– Soit P_f le polynôme d'interpolation de Lagrande de f aux points $a, \frac{a+b}{2}, b$ et $r(x) = f(x) - P_f(x)$.

2–a Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $r''(c) = 0$.

2–b Montrer que $E(f) = r''(\frac{a+b}{2})$.

2–c En déduire que

$$|E(f)| \leq \frac{b-a}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'''(x)|$$

3– Calculer les réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ en fonction de a et b pour que la propriété (1) soit vérifiée.

Problème

On considère la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $k+1$ points, $k \geq 0$, donnée par :

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i) + E(f)$$

où nous avons désigné par :

- $E(f)$ le terme d'erreur (on ne s'intéresse pas ici à l'étude de $E(f)$);
- x_i, $0 \leq i \leq k$, les nœuds d'intégration vérifiant : $-1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_k < 1$;
- λ_i, $0 \leq i \leq k$, les poids d'intégration.

On rappelle que $x_0, \ldots, x_k$ sont les $k+1$ racines du $(k+2)$-ième polynôme orthogonal de Legendre $Q_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1}$ (qui est unitaire) associé à la fonction poids $w \equiv 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Le but de ce problème est de calculer les $(k+1)$ nœuds $x_0, \ldots, x_k$ ainsi que les $k+1$ poids $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ de la formule de quadrature de Gauss-Legendre donnée par (1).

Le problème est divisé en trois parties. La première est une étape préliminaire, la deuxième concerne le calcul des nœuds x_i et la dernière porte sur le calcul des poids λ_i.

Partie I : Soient $r_0 < r_1 < \cdots < r_m$, $(m+1)$ réels, $m > 0$, et $P \in \mathcal{P}_{m+1}$ le polynôme défini par $P(x) \;=\; (x - r_0)\;(x - r_1)\;\cdots\;(x - r_m)$.

On considère la méthode de Newton appliquée à la résolution de l'équation $P(x) = 0$. On rappelle que cette méthode génère la suite définie par :

$$t_0 \text{ donné}, \quad t_{\ell+1} = t_\ell - \frac{P(t_\ell)}{P'(t_\ell)}, \quad \ell \geq 0$$

On suppose que $t_0 > r_m$.

I.1– Montrer que $\forall\,\ell$, $t_\ell > r_m$ et que la suite $(t_\ell)_{\ell\geq 0}$ est décroissante.

I.2– En déduire que la suite $(t_\ell)_{\ell\geq 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{\ell\to+\infty} t_\ell = r_m$.

Partie II : On considère le $(k+2)$-ième polynôme orthogonal (de Legendre) Q_{k+1} associé à la fonction poids $w \equiv 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, et ses $(k+1)$ racines notées $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$.

II.1– Montrer que la méthode de Newton appliquée à Q_{k+1}, avec une initialisation $t_0 > x_k$, génère une suite $(t_\ell)_{\ell\geq 0}$ qui converge vers x_k.

II.2– On suppose que les racines $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_j$ $(1 < j \leq k)$ de Q_{k+1} ont été déjà calculées et on se propose de calculer x_{j-1}.

On considère le polynôme $R_j \in \mathcal{P}_j$ défini par : $R_j(x) = Q_{k+1}(x)/\prod_{i=j}^{k}(x - x_i)$

Montrer que la méthode de Newton appliquée au polynôme R_j, avec une initialisation $t_0 = x_j$, génère une suite $(t_\ell)_{\ell\geq 0}$ qui converge vers x_{j-1}.

II.3– En déduire un algorithme qui permet de calculer les $(k+1)$ racines $x_0, x_1, \ldots, x_k$ de Q_{k+1}.

Partie III : On s'intéresse dans cette partie au calcul des poids λ_i intervenant dans la formule de Gauss-Legendre donnée par (1). Rappelons que cette formule est de degré $2k+1$.

Montrer que les poids λ_i, $i = 0, \ldots, k$, sont donnés par

$$\lambda_i = \frac{1}{Q'_{k+1}(x_i)} \int_{-1}^{1} \frac{Q_{k+1}(x)}{x - x_i}\, dx$$

$\square$

E.N.I.T. **2001/2002**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 12 Mars 2002

Enseignant(s) : H. EL FEKIH Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GE & TELEC** **Documents non autorisés**

Exercice 1

Soit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|u\|_2 < 1$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1– Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice donnée par $A = uu^t$. Calculer $\|\|A\|\|_2$, où $\|\|\cdot\|\|_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_2$.

2– Soit B la matrice donnée par $B = I + A$, où I désigne la matrice identité. Montrer que B est inversible.

Exercice 2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles admettant chacune la factorisation "LU" :

$$A = L_A U_A, \quad \begin{array}{ll} L_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

$$B = L_B U_B, \quad \begin{array}{ll} L_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ définie (par blocs) comme suit :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right)$$

1– Montrer que M est inversible.

2– Montrer que la matrice M admet une factorisation "LU" unique.

3– Proposer une méthode pour résoudre le système linéaire $Mx = b$, où $b \in \mathbb{R}^{n+m}$, et donner le nombre d'opérations élémentaires.

Exercice 3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le système linéaire

$$(1) \qquad Ax = b$$

dont on notera $\bar{x}$ sa solution.

1– Vérifier que le système (1) est équivalent au système :

$$(2) \qquad A^T Ax = A^T b$$

2– Montrer que la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive.

3– Pour résoudre le système (1), on considère la méthode du gradient à pas constant appliquée au système (2) :

$$(3) \qquad \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - r\nabla J(x^{(k)}), \quad k \geq 0 \end{cases}$$

où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $J(\cdot)$ est la fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$J(x) = \frac{1}{2}(A^T Ax, x) - (A^T b, x)$$

$(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.

3–a Montrer que la méthode du gradient à pas constant (3) est convergente, si et seulement si $0 < r < \dfrac{2}{\|A\|_2^2}$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_2$. Quelle est dans ce cas la limite de la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ définie par (3) ?

3–b On note $g^{(k)} = \nabla J(x^{(k)})$. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\frac{\|g^{(k)}\|_2}{\|A^T b\|_2} \leq \varepsilon \Longrightarrow \frac{\|x^{(k)} - \bar{x}\|_2}{\|\bar{x}\|_2} \leq \varepsilon[\mathrm{cond}_2(A)]^2$$

où $\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$ et $\bar{x}$ désigne la solution de (2)(ou de (1)).

3–c Ecrire l'algorithme de la méthode du gradient à pas constant appliquée au système (2).

E.N.I.T. **juillet 2002**

Examen – Session de rattrapage ANALYSE NUMÉRIQUE

Enseignante : HENDA EL FEKIH Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GE 1-2 & TELEC 1-2** **Documents non autorisés**

Exercice 1

On considère le système linéaire $Ax = c$ où A une matrice carrée inversible d'ordre n . On note λ_i ses valeurs propres ordonnées comme suit : $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_{n-1} < \lambda_n$. Soit B une autre matrice carrée inversible d'ordre n.

1. Montrer que le système linéaire $Ax = c$ est équivalent au système : $x = (I - B^{-1}A)x + d$, où I est la matrice idendité et d un vecteur que l'on exprimera en fonction de c.

2. On suppose que $B = \alpha I$ $(\alpha > 0)$ et on considère la méthode itérative : $x^{(k+1)} = (I-B^{-1}A)x^{(k)}+d,\ (k \geq 0)$. On note par la suite $F = I - B^{-1}A$ et $\rho(F)$ le rayon spectral de la matrice F.

2.1 Exprimer $\rho(F)$ en fonction de α, λ_1 et λ_n (on discutera l'expression de $\rho(F)$ avec α).

2.2 En déduire une condition sur α assurant que la méthode itérative est convergente.

2.3. Pour quelle valeur α_o de α la vitesse de convergence est-elle la plus élevée ? Que vaut dans ce cas $\rho(F)$?

Exercice 2

On considère le système linéaire $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1- Ecrire les méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ (donner explicitement les expressions des composantes de $x^{(k+1)}$).

2- Calculer dans les deux cas le vecteur $x^{(1)}$ obtenu après la première itération, à partir du vecteur initial $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$.

3- Trouver sous quelles conditions sur α, β, γ les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont convergentes.

4- Dire laquelle des deux méthodes converge la plus vite.

Exercice 3

On considère la matrice carrée d'ordre 4 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & 1 \\ & 2 & & 1 \\ & & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

où les termes manquants sont des zéros.

1- calculer la factorisation LU de la matrice A et comparer la structure (c'est-à-dire la position des éléments non nuls) des matrices L et U obtenues avec celle de A.

2- Si on considère maintenant une matrice d'ordre n avec la structure suivante :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \beta_1 \\ & \alpha_2 & & & \beta_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où tous les coefficients α_i, β_i et γ_i sont des réels donnés, quelle est la structure des matrices L et U ?

3- En revanche, que se passe-t-il si on prend une matrice de la forme suivante :

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ \gamma_3 & & \alpha_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \gamma_n & & & & \alpha_n \end{pmatrix}?$$

Help! On rappelle qu'à l'étape p de la factorisation LU, la p-ème ligne de U et la p-ème colonne de L sont déterminées comme suit :

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} \ell_{pk} u_{kj},\ p \leq j \qquad \ell_{ip} = \left(a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} \ell_{ik} u_{kp} \right) / u_{pp},\ p < i.$$

E.N.I.T. **2002/2003**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 11 Juin 2003

Enseignant(s) : H. EL FEKIH Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GM** **Documents non autorisés**

Exercice 1

On suppose que l'équation

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

admet une unique solution simple α sur $[a, b]$,où f et g sont monotones et dérivables.

1– Démontrer que si $|\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}| < 1$, alors la méthode itérative

$$x_0 \text{ donné}, \qquad f(x_{n+1}) = g(x_n),\ n \geq 0$$

est convergente.

2– On suppose que $|\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}| > 1$. Proposer une méthode itérative convergente pour calculer α.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont on connait une valeur propre λ et un vecteur propre associé u de norme $\|u\|_2 = 1$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $B = A - \lambda u u^t$.

1– Montrer que 0 est une valeur propre de B de vecteur propre associé u.

2– Soit β une autre valeur propre de A ($\beta \neq \lambda$) de vecteur propre associé v.

Montrer que β est une valeur propre de B de vecteur propre associé v.

3– Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec leur ordre de multiplicité, vérifiant :

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$$

En utilisant la méthode de la puissance, donner une méthode qui permet de calculer λ_n et λ_{n-1} et préciser les hypothèses sous lesquelles la méthode proposée converge.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On suppose que A est inversible et admet la factorisation $A = LU$, où $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure à éléments diagonaux égaux à 1, et où $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure.

Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note A_k la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A en ne gardant que les k premières lignes et les k premières colonnes, soit $A_k = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$.

1– Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la matrice A_k admet la factorisation $A_k = L_k U_k$, où $L_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure à éléments diagonaux égaux à 1, et où $U_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure.

2– On pose, pour $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$:

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & v_k \\ \hline w_k^t & a_{kk} \end{array}\right), \quad \text{où } v_k \in \mathbb{R}^{k-1} \text{ et } w_k \in \mathbb{R}^{k-1}.$$

En supposant connue la factorisation $A_{k-1} = L_{k-1}U_{k-1}$ et en écrivant :

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} L_{k-1} & 0 \\ \hline m_k^t & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{k-1} & q_k \\ \hline 0 & u_{kk} \end{array}\right), \quad \text{où } m_k \in \mathbb{R}^{k-1}, q_k \in \mathbb{R}^{k-1} \text{ et } u_{kk} \in \mathbb{R},$$

montrer comment on peut déterminer la factorisation $A_k = L_k U_k$.

3– Déduire de ce qui précède une méthode pour la détermination de la factorisation LU de la matrice A.

E.N.I.T. **2 juillet 2003**

Examen – Session de rattrapage

Analyse Numérique

Enseignants : H. El Fekih – M. Jaoua – M. Moakher – A. Sakat Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC – GE – GI – GM – INFO – TELEC** **Documents non autorisés**

Exercice 1

1– Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive (ou seulement symétrique positive).

1-a Montrer que pour tout réel $r > 0$ la matrice $rI + H$ est inversible.

1-b Montrer que pour tout réel $r > 0$ la matrice $(rI - H)(rI + H)^{-1}$ est symétrique.

1-c Soit λ une valeur propre de H et u un vecteur propre qui lui est associé. Montrer que $\dfrac{r-\lambda}{r+\lambda}$ est une valeur propre de $(rI - H)(rI + H)^{-1}$ associée au vecteur propre u.

1-d En déduire que $\|(rI - H)(rI + H)^{-1}\|_2 < 1$ pour H symétrique définie positive, et que $\|(rI - H)(rI + H)^{-1}\|_2 \leq 1$ pour H symétrique positive. ($\|\cdot\|_2$ désigne la norme matricielle subordonnée indice 2).

2– Soit H_1 une matrice symétrique définie positive et H_2 une matrice symétrique positive. On suppose que les deux matrices H_1 et H_2 commutent. Pour u_0 et b donnés dans $\mathbb{R}^n$, on définit la suite (u_k) par :

$$\begin{aligned}(rI + H_1)u_{k+\frac{1}{2}} &= (rI - H_2)u_k + b\\ (rI + H_2)u_{k+1} &= (rI - H_1)u_{k+\frac{1}{2}} + b\end{aligned}$$

2-a Ecrire u_{k+1} en fonction de u_k sous la forme $u_{k+1} = Bu_k + c$, où la matrice B et le vecteur c sont à déterminer.

2-b Montrer que la suite (u_k) converge vers un vecteur u et que u est solution d'un système linéaire à déterminer.

Exercice 2

1– Soit $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{aligned}&b_{ij} \geq 0 && , 1 \leq i,j \leq n\\ &\|B\|_\infty \equiv \max_{1\leq i\leq n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big) < 1\end{aligned}$$

Montrer que $I - B$ est inversible et que $(I - B)^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls (I désigne la matrice identité).

2– Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{aligned}&a_{ii} > 0 && , 1 \leq i \leq n\\ &a_{ij} \leq 0 && , 1 \leq i \neq j \leq n\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0 && , 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

et soit D la matrice diagonale formée par la diagonale de A :$d_{ii} = a_{ii}$ pour $1 \leq i \leq n$, $d_{ij} = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$.

2–a Montrer que D est inversible. On pose alors $C = D^{-1}A$.

2–b Calculer les coefficients de la matrice C en fonction de ceux de A.

2–c Montrer que A est inversible et que les coefficients de la matrice A^{-1} sont positifs ou nuls.

$\square$

E.N.I.T. **2003/2004**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 23 Janvier 2004

Enseignants : H. EL FEKIH – K. GRIBAA Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC & GI** **Documents non autorisés**

Exercice

Soit $f : \mathbb{D} = [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{D}$ et Lipschitizienne par rapport à la deuxième variable. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = f(x,y), & x \in [a,b] \\ y(a) = Y_0 \end{cases}$$

dont la solution exacte est notée Y. Soit $x_0 = a, x_1, \ldots, x_N = b$, $N+1$ points équidistants appartenant à $[a,b]$, et soit $h = x_{n+1} - x_n$, $n = 0, \ldots, N-1$.

1– En utilisant la formule d'intégration numérique du point milieu, montrer que :

$$Y(x_{n+1}) - Y(x_n) = hf\left(x_{n+\frac{1}{2}}, Y(x_{n+\frac{1}{2}})\right) + E_1(f)$$

où $x_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$.

[$E_1(f)$ est le terme d'erreur (on ne demande pas l'expression de $E_1(f)$).]

2– En utilisant la formule d'intégration numérique du rectangle à gauche, montrer que

$$Y(x_{n+\frac{1}{2}}) = Y(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, Y(x_n)) + E_2(f)$$

[$E_2(f)$ est le terme d'erreur (on ne demande pas l'expression de $E_2(f)$).]

3– En déduire un schéma numérique à un pas :

$$(S) \qquad y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

pour la détermination d'une approximation y_n de $Y(x_n)$.

4– Montrer que le schéma (S) est stable, consistant et est d'ordre 2.

Problème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(I\!\!R)$ une matrice symétrique définie positive. On considère les fonctions définies par

$$\rho : \begin{array}{l} I\!\!R^n \longrightarrow I\!\!R \\ v \mapsto v^t A v = (Av, v) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{l} I\!\!R^n \longrightarrow I\!\!R^n \\ v \mapsto Av - \rho(v)v \end{array}$$

où v^t désigne le transposé de v et $(.,.)$ le produit scalaire Euclidien sur $I\!\!R^n$.

1– Montrer que $v \in I\!\!R^n$ est vecteur propre de A avec $\|v\|_2 = 1$ si et seulement si $v \neq 0$ et $f(v) = 0$.

2– En déduire que $u \in I\!\!R^n$ est solution du problème de minimisation suivant

$$\begin{array}{ll} Trouver & u \in S \equiv \{x \in I\!\!R^n / \|x\|_2 = 1\} \\ \forall v \in S & \|f(u)\|_2 \leq \|f(v)\|_2 \end{array}$$

si et seulement si $u \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de A et $\|u\|_2 = 1$.
3– Soient $v, w \in \mathbb{R}^n$.On considère les fonctions

$$g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \rho(v+tw) \end{array}$$

$$h: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto f(v+tw) \end{array}$$

3-a Montrer que

$$g'(t) = 2(w^t Av + tw^t Aw)$$

$$h'(t) = Aw - g(t)w - g'(t)(v+tw)$$

3-b Montrer en utilisant un développement limité de la fonction h au voisignage de zéro, que

$$\|h(t)\|_2^2 = (h(0), h(0)) + 2t(h'(0), h(0)) + O(t^2)$$

3-c Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_2 = 1$. On suppose que $det(A - \rho(v)I) \neq 0$. On pose $w = -v + \alpha z$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^n$ est la solution du système linéaire $(A - \rho(v)I)z = v$. Montrer que

$$(h'(0), h(0)) = -\|Av - \rho(v)v\|_2^2$$

et en déduire que $(h'(0), h(0)) < 0$.
4– Soit z et $v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|v\|_2 = 1$ et $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \in [0,1]$ on ait

$$\|(1-t)v + t\alpha z\|_2^2 = 1$$

5– Soit $v \in \mathbb{R}^n$, on suppose que $det(A - \rho(v)I) = 0$. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{R}^n$ avec $\|w\|_2 = 1$ vérifiant

$$(A - \rho(v)I)w = 0$$

6– On considère l'algorithme

Soient t "assez petit" et v_0 tel que $\|v_0\|_2 = 1$
Pour k=1,2 ... faire
* Si $det(A - \rho(v_{k-1})I) = 0$, alors il existe $w_k \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|w_k\|_2 = 1$ et $(A - \rho(v_{k-1})I)w_k = 0$
  $\lambda_k = \rho(v_{k-1})$
  $v_k = w_k$
  STOP
* Si $det(A - \rho(v_{k-1})I) \neq 0$ alors
  Résoudre $(A - \rho(v_{k-1})I)z_k = v_{k-1}$
  Déterminer $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que $\|(1-t)v_{k-1} + t\alpha_k z_k\|_2^2 = 1$
  $w_k = -v_{k-1} + \alpha_k z_k$
  $v_k = v_{k-1} + tw_k$
  $\lambda_k = \rho(v_k)$

6-a Montrer en utilisant 3-, que dans le cas où $det(A - \rho(v_{k-1})I) \neq 0$, on a pour t "assez petit"

$$\|f(v_k)\|_2 < \|f(v_{k-1})\|_2$$

6-b Que représente l'élement (λ_k, v_k) dans le cas où $det(A - \rho(v_{k-1})I) = 0$?
6-c On suppose que l'algorithme ci-dessus converge. Quelle est alors la limite de la suite (λ_k, v_k).

□

E.N.I.T. **28 juin 2004**

Examen – Session de rattrapage

Analyse Numérique

Enseignants : H. El Fekih – K. Gribaa – M. Mnif – M. Moakher Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC – GE – GI – GM – INFO – TELEC** **Documents non autorisés**

Exercice

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où $A_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2$, sont quatre matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec A_{11} inversible. On se propose de déterminer la factorisation par blocs de M sous la forme $M = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ L_{21} & I_n \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ O_n & U_{22} \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, O_n la matrice identiquement nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $L_{21}, U_{11}, U_{12}, U_{22}$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les matrices L_{21}, U_{11}, U_{12}, et U_{22} en fonction des matrices A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$.

2. En déduire que $\det M = \det A_{11} \times \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$.

Problème

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère les deux suites de $\mathbb{R}^n$ définies par les itérations suivantes :

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } y^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés,}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} x^{k+1} = By^k + a, \\ y^{k+1} = Ax^k + b. \end{cases}$$

1. On pose $z^k = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix}$. Montrer qu'on peut écrire (1) sous la forme $z^{k+1} = Cz^k + c$, où C est une matrice d'ordre $2n$ et $c \in \mathbb{R}^{2n}$. Expliciter C et c.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice C, pour que les suites $(x^k)_{k \geq 0}$ et $(y^k)_{k \geq 0}$ définies par (1) soient convergentes.

3. Montrer que

$$Sp(AB) \setminus \{0\} = \{\lambda^2,\ \lambda \in Sp(C)\} \setminus \{0\},$$

où $Sp(\cdot)$ désigne l'ensemble des valeurs propres.

Indication: *On peut utiliser la question* 2. *de l'exercice* 1.
En déduire que $\varrho^2(C) = \varrho(AB)$, où $\varrho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.

4. On considère maintenant les suites de $\mathbb{R}^n$, $(u^k)_{k\geq 0}$ et $(v^k)_{k\geq 0}$ définies par :

$$u^0 = x^0 \text{ et } z^0 = y^0$$

$$(2) \qquad \begin{cases} u^{k+1} = Bv^k + a, \\ v^{k+1} = Au^{k+1} + b. \end{cases}$$

On pose $w^k = \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \end{pmatrix}$. Montrer qu'on peut écrire (2) sous la forme $w^{k+1} = Dw^k + d$, où $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $d \in \mathbb{R}^{2n}$ sont à déterminer.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur D pour que la suite $(w^k)_{k\geq 0}$ soit convergente.

6. Montrer que $\varrho(D) = \varrho(AB)$.

7. Dans cette question, on se place dans le cas où les suites $(z^k)_{k\geq 0}$ et $(w^k)_{k\geq 0}$ définies précédemment sont convergentes. Montrer qu'elles admettent la même limite. Comparer alors le taux de convergence des méthodes itératives (1) et (2).

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 27 Janvier 2005

Enseignants :H. CHAKER – H. EL FEKIH Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC & GI** **Documents non autorisés**

Exercice 1

Soient $T > 0$, f et g deux fonctions définies sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose que f et g sont lipschitziennes par rapport à la deuxième variable. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) + g(t, y(t)), \quad t \in]0, T[\\ y(0) = Y_0 \end{cases}$$

Pour résoudre numériquement l'équation (E), on introduit la discrétisation de l'intervalle $[0, T] = \cup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$, avec $t_0 = 0$, $t_{n+1} - t_n = h = \frac{T}{N}$, où $N > 0$, et le schéma à un pas

$$(S) \qquad \begin{cases} y_0 = Y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h), \ n \geq 0 \end{cases}$$

où y_n désigne une approximation de la solution exacte Y de (E) en t_n et Φ est définie, pour $(t, y, h) \in]0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par :

$$\Phi(t, y, h) = F(t, y, h) + G(t, y + hF(t, y, h), h)$$

avec

$$F(t, y, h) = f(t, y) + \frac{h}{2} f^{(1)}(t, y) \qquad \text{et} \qquad G(t, y, h) = g(t, y) + \frac{h}{2} g^{(1)}(t, y)$$

On rappelle que $f^{(1)}(t, y) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, y) + f(t, y) \dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y)$.

1. Donner une condition suffisante sur les fonctions $f^{(1)}$ et $g^{(1)}$ pour que le schéma (S) soit stable.
2. Montrer que le schéma (S) est consistant.
3. En déduire, sous les conditions de la question 1, que le schéma (S) est convergent et est d'ordre 1 (au moins).
4. Le schéma (S) est-il d'ordre 2? (justifiez votre réponse).

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant la décomposition $A = M - N$, où M et N sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec M inversible. Pour la résolution approchée du système linéaire $Ax = b$, avec $b \in \mathbb{R}^n$, on considère la méthode itérative :

$$(1) \qquad \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \ \text{donné} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que si A est symétrique définie positive et si la matrice symétrique $M + M^T - A$ est définie positive, alors la méthode itérative (1) est convergente et $\rho(M^{-1}N) < 1$. ($\rho(B)$ désigne le rayon spectral d'une matrice B)
2. Pour $k \geq 0$, on pose $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$. Montrer qu'on peut écrire la méthode itérative (1) sous la forme :

$$(2) \qquad \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \ \text{donné}, \ r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1} r^{(k)}, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

3. Soit α un réel strictement positif. On considère la méthode de Richardson stationnaire :

$$(3) \qquad \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{donné}, \; r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha M^{-1} r^{(k)}, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que la méthode itérative (3) est convergente, si et seulement si

$$\frac{Re(\lambda_i)}{\alpha|\lambda_i|^2} > \frac{1}{2}, \qquad \forall\, i = 1, \cdots, n$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $M^{-1}A$ et $Re(\lambda_i)$ (resp. $|\lambda_i|$) désigne la partie réelle de λ_i (resp. le module de λ_i).

4. On suppose que les valeurs propres de $M^{-1}A$ sont toutes réelles, strictement positives et vérifient : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$

   (a) Montrer que la méthode itérative (3) est convergente, si et seulement si : $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_n}$

   (b) Soit $R_\alpha = I - \alpha M^{-1}A$, la matrice de la méthode itérative (3), et α_{opt} le paramètre optimal défini par :

$$\rho(R_{\alpha_{opt}}) \leq \rho(R_\alpha), \qquad \forall\, \alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[.$$

   Donner l'expression de α_{opt} en fonction de λ_1 et λ_n.

   (c) En déduire, que si $M^{-1}A$ est symétrique définie positive, alors

$$\rho(R_{\alpha_{opt}}) = \frac{\operatorname{cond}_2(M^{-1}A) - 1}{\operatorname{cond}_2(M^{-1}A) + 1} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{opt} = \frac{2\|A^{-1}M\|_2}{\operatorname{cond}_2(M^{-1}A) + 1}$$

Exercice 3

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $1 \leq n < m$. On suppose qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ telle que la matrice $QA = T = (T_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ soit nulle en dessous de la diagonale principale :

$$T = \left(\begin{array}{cccc} T_{11} & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) = \left(\frac{R}{O} \right), \qquad R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{avec } R_{ij} = T_{ij}, \; 1 \leq i, j \leq n$$

où O est la matrice identiquement nulle de $\mathcal{M}_{m-n,n}(\mathbb{R})$. Soit $b \in \mathbb{R}^m$, on dira que $x \in \mathbb{R}^n$ est solution du système $Ax = b$ ***au sens des moindres carrés*** si x vérifie:

$$(P) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|Ax - b\|_{2,m} \leq \|Ay - b\|_{2,m}$$

où $\|.\|_{2,m}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|Ay - b\|_{2,m} = \|Ty - Qb\|_{2,m}$$

2. En déduire que si x est solution de (P), alors

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|Rx - c\|_{2,n} \leq \|Ry - c\|_{2,n}$$

   où $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de composante $c_i = (Qb)_i$, $1 \leq i \leq n$ et $\|.\|_{2,n}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

3. En déduire que si x est solution de(P) et si R est inversible, alors x est solution du système linéaire $Rx = c$. $\square$

E.N.I.T. **2 juillet 2005**

Examen – Session de rattrapage

ANALYSE NUMÉRIQUE

Enseignants : H. CHAKER, H. EL FEKIH – M. MNIF – M. MOAKHER Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC – GE – GI – GM – INFO – TELEC** **Documents non autorisés**

Soit m et n deux entiers > 0, A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ et α un nombre réel > 0.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on introduit la fonctionnelle $S(x) = \dfrac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \dfrac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$ et le problème de minimisation associé :

$$(1) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} S(x)$$

($\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne).

1– Montrer que le gradient de S est donné pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par $\nabla S(x) = A^T(Ax - b) + \alpha x$.

Soit $r \in \mathbb{R}^m$, on considère le système linéaire :

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} I & A \\ A^T & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité.

2– Montrer que la matrice $A^T A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et semi-définie positive :

$$(A^T Ax, x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

En déduire que les valeurs propres λ_i de $A^T A$, $1 \leq i \leq n$, sont toutes réelles et positives. On notera dans la suite $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ (σ_i est appelée valeur singulière de A).

3– En déduire que la matrice du système linéaire (2) est inversible.

4– Montrer que si $(\bar{r}, \bar{x})$ est solution de (2) alors $\bar{x}$ est solution du problème de minimisation (1).

5– Donner la matrice J d'itération de Jacobi du système (2).

6– Donner la matrice $\mathcal{L}_1$ d'itération de Gauss-Seidel du système (2).

7– Exprimer les valeurs propres non nulles de J en fonction de σ_i et α et donner la condition de convergence de la méthode de Jacobi pour la résolution du système (2).

8– Exprimer les valeurs propres non nulles de $\mathcal{L}_1$ en fonction de σ_i et α et donner la condition de convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système (2).

9– Comparer la vitesse de convergence des deux méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

□

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 25 Janvier 2006

Enseignantes : H. CHAKER – H. EL FEKIH Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GI - GC - Hydro-Météo** **Documents non autorisés**

Problème

Partie I

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique semi-définie positive et γ un réel > 0. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I-1 Montrer que la matrice $\gamma I + C$ est symétrique définie positive et en déduire qu'elle est inversible.

I-2 Montrer que les deux matrices $\gamma I - C$ et $(\gamma I + C)^{-1}$ commutent.

I-3 En déduire que la matrice $D = (\gamma I - C)(\gamma I + C)^{-1}$ est symétrique.

I-4 Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres pour C. On notera cette base $(e_1, ..., e_n)$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres associées (comptées avec leur ordre de multiplicité).

I-5 Montrer que, pour tout $i = 1, .., n$, e_i est un vecteur propre de D et calculer la valeur propre qui lui est associée en fonction de λ_i et γ.

I-6 En déduire que $|||D|||_2 \leq 1$.
($|||.|||_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $||.||_2$).

I-7 Montrer que $|||D|||_2 = 1$ si et seulement si 0 est une valeur propre de C.

Partie II

Soit γ un réel > 0 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible donnée par $A = C_1 + C_2$, où C_1 et C_2 sont deux matrices symétriques semi-définie positives. Pour la résolution numérique du système linéaire $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$, on propose la méthode itérative suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\[2ex] (\gamma I + C_1)y^{(k)} = (\gamma I - C_2)x^{(k)} + b, \quad k \geq 0 \\[2ex] (\gamma I + C_2)x^{(k+1)} = (\gamma I - C_1)y^{(k)} + b, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

II-1 Ecrire la méthode (1) sous la forme :

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k \geq 0$$

où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^n$ sont à déterminer.

II-2 On définit

$$D_1 = (\gamma I - C_1)(\gamma I + C_1)^{-1} \quad et \quad D_2 = (\gamma I - C_2)(\gamma I + C_2)^{-1}$$

Montrer que $Sp(B) \subset Sp(D_1 D_2)$ (où $Sp(B)$ désigne le spectre de B). En déduire que $\rho(B) \leq 1$. (Indication : on pourra utiliser l'inégalité $\rho(D_1 D_2) \leq |||D_1 D_2|||_2$).

II-3 On suppose que l'une des deux matrices C_1 et C_2 est inversible. En déduire que $\rho(B) < 1$ et par conséquent, la méthode itérative (1) converge. Quelle est dans ce cas la limite de la suite $(x^{(k)})_k$ générée par la méthode (1) ? (Justifiez votre réponse).

Exercice

Soient f et $\bar{f}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $x_0, \ldots.., x_n$, $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On note par P_n (respectivement $\bar{P}_n$) le polynôme d'interpolation de Lagrange de f (respectivement $\bar{f}$) aux points $x_0, \ldots.., x_n$.

1. Rappeler l'expression de P_n (respectivement $\bar{P}_n$) en fonction de $L_i(x)$ et $f(x_i)$ (respectivement $\bar{f}(x_i)$), où $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, $i = 0, \ldots.n$.

2. Montrer que
$$||P_n - \bar{P}_n||_\infty \leq \Lambda_n \; ||f - \bar{f}||_\infty$$
où $\Lambda_n = || \sum_{i=0}^{n} |L_i| \; ||_\infty$.

3. En déduire que
$$||f - P_n||_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{q \in \mathcal{P}_n} ||f - q||_\infty$$
(Notation: $||g||_\infty = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|$; $\quad \mathcal{P}_n =$ l'ensemble des polynômes de degré$\leq n$).

E.N.I.T. **4 juillet 2006**

Examen – Session de rattrapage

ANALYSE NUMÉRIQUE

Enseignants : H. CHAKER – H. EL FEKIH – M. MNIF Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GC – GI – GM** **Documents non autorisés**

Exercice1

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et P_g sont polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $0, \frac{1}{2}, 1$. Le but de l'exercie est d'approcher la valeur $D_2 g \equiv g''(\frac{1}{2})$.

Soit $\Delta_2 g$ l'expression définie par :

$$\Delta_2 g = 4g(0) - 8g(\frac{1}{2}) + 4g(1)$$

1– Montrer que :

$$\forall\, Q \in \mathbb{P}_2, \qquad D_2 Q = \Delta_2 Q$$

où $\mathbb{P}_2$ désigne l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2, avec

$$D_2 Q = Q''(\frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \Delta_2 Q = 4Q(0) - 8Q(\frac{1}{2}) + 4Q(1)$$

.

2– Montrer que $g[0, \frac{1}{2}, 1] = \frac{1}{2}\Delta_2 g$, où $g[0, \frac{1}{2}, 1]$ désigne la différence divisée d'ordre 2 de g aux points $0, \frac{1}{2}, 1$, i.e. le coefficient du monôme de plus haut degré dans P_g.

3– On pose pour tout $x \in [0,1]$, $r(x) = g(x) - P_g(x)$.

3–a Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $r''(c) = 0$.

3–b Montrer que $D_2 g - \Delta_2 g = r''(\frac{1}{2})$.

3–c En déduire que

$$|D_2 g - \Delta_2 g| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [0,1]} |g^{(3)}(x)|$$

Exercice 2

1– Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{aligned} & b_{ij} \ge 0, && 1 \le i,j \le n \\ & \|B\|_\infty \equiv \max_{1\le i\le n}(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}) < 1. \end{aligned}$$

Montrer que $I - B$ est inversible et que $(I-B)^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls (I désigne la matrice identité).

2– Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{aligned} & a_{ii} > 0, && 1 \le i \le n \\ & a_{ij} \le 0, && 1 \le i \ne j \le n \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0, && 1 \le i \le n \end{aligned}$$

et soit D la matrice diagonale définie par:

$$d_{ii} = a_{ii},\ 1 \le i \le n, \qquad d_{ij} = 0,\ 1 \le i \ne j \le n.$$

2–a Montrer que A est à diagonale dominante stricte (i.e. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|,\ \forall\, i = 1, \cdots, n$).

2–b Montrer que D est inversible.

2–c On pose $C = D^{-1}A$. Calculer les coefficients $(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ de C.

2–d Montrer que C est inversible et que C^{-1} est à coefficients positifs ou nuls.

Exercice 3

Soit n un entier > 1 et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On considère la formule de quadrature :

(1)
$$\int_0^1 f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_i) + \alpha h f'(x_i) + \beta h^2 f''(x_i)\big) + E_n(f)$$

où $h = \dfrac{1}{n}$ et $x_i = ih,\ i = 0, ..., n$.

1– Déterminer les coefficients α et β pour que la formule de quadrature (1) soit de degré (au moins) égal à 2.

(Rappel: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$).

2– Montrer qu'il existe $\eta \in [0,1]$ tel que :

$$E_n(f) = \frac{1}{4!n^3} f^{(3)}(\eta).$$

En déduire que le degré de la formule de quadrature (1) est exactement égal à 2.

□

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 26 Janvier 2007

Enseignants : H. EL FEKIH – N. GMATI Durée : **1h30**

Classe : **1ère année GI - GC - Hydro-Météo** **Documents non autorisés**

Exercice 1

Soit le système linéaire $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ sont donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

avec α, β, γ et δ des paramètres réels et $\alpha \neq 0$.

1– Ecrire la méthode itérative de Jacobi sous la forme d'un système itératif (expression des itérés) pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.

2– Fournir une condition nécessaire et suffisante (sur les paramètres intervenants dans A) afin que la méthode de Jacobi converge.

3– Ecrire la méthode itérative de Gauss-Seidel sous la forme d'un système itératif (expression des itérés) pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.

4– Fournir une condition nécessaire et suffisante (sur les paramètres intervenants dans A) afin que la méthode de Gauss-Seidel converge.

5– Fournir une condition nécessaire et suffisante (sur les paramètres intervenants dans A) afin que la méthode du gradient à pas optimal converge.
[Aide : une matrice symétrique est définie positive, si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives]

6– On prend ici $\gamma = 0$, $\delta = \beta = \alpha/4$, avec $\alpha > 0$. Trouver le nombre minimum d'itérations nécessaire pour que l'erreur $e^{(k)}$ à la $k-$ème itération de la méthode du gradient à pas optimal vérifie :

$$\|e^{(k)}\|_A \leq 10^{-3}\|e^{(0)}\|_A$$

[Aide : $Log(10)/Log(4) \approx 1.66$, $\quad \|e^{(k)}\|_A \leq \frac{\text{cond}_2(A)-1}{\text{cond}_2(A)+1}\| e^{(k-1)}\|_A$, $\|\cdot\|_A$: norme vectorielle associée à la matrice A]

Exercice 2

Soit $f \in C^2([-1,1])$ et P le polynôme d'interpolation d'Hermite de f au point -1 vérifiant :

$$P(-1) = f(-1) \qquad \text{et} \qquad P'(-1) = f'(-1)$$

1– Déterminer l'expression de P.

2– On considère la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f'(-1) + E(f) \tag{1}$$

2–a Déterminer α_0 et α_1 pour que la formule (1) soit de degré au moins 1.

2–b Montrer qu'il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que $E(f) = \frac{4}{3}f''(\eta)$.
[Aide : On rappelle que pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $\xi_t \in [-1,1]$, dépendant de t, tel que $f(t) - P(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 f''(\xi_t)$.]

2–c En déduire que la formule de quadrature (1) est exactement de degré 1. □

E.N.I.T. **25 juin 2007**

Examen – Session de rattrapage

ANALYSE NUMÉRIQUE

Enseignants : N. GMATI – H. EL FEKIH – M. MOAKHER – R. OUANES

Classes : **1ère année GC – GE – GI – Hydro Météo – INFO - TELECOM**

Durée : **1H30** **Documents non autorisés**

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$, où m et n sont deux entiers naturels non nuls avec $m \neq n$. On considère le problème suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{trouver } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi(\bar{x}) \leq \Phi(y) \end{cases}$$

où la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$$

avec α un nombre réel non nul et $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne.

1– Vérifier que le gradient de Φ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ est donné par

$$\nabla\Phi(x) = A^T(Ax - b) + \alpha x$$

On admettra dans toute la suite que le problème (1) admet une unique solution $\bar{x}$, et que cette solution est caractérisée par $\nabla\Phi(\bar{x}) = 0$.

2– En déduire que $\bar{x}$ vérifie $(A^TA + \alpha I_n)\bar{x} = A^Tb$ et que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} I_m & A \\ A^T & -\alpha I_n) \end{pmatrix}$$

est inversible. (I_n (resp. I_m) désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$).

3– Soit $r = b - A\bar{x}$. Montrer que le vecteur $(r, \bar{x})^t \in \mathbb{R}^{m+n}$ est solution du système linéaire :

$$(2) \qquad M\begin{pmatrix} r \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

4– Donner en fonction de A et de α l'expression de la matrice J de Jacobi pour la résolution du système (2) par la méthode itérative de Jacobi.

5– Donner en fonction de A et de α l'expression de la matrice $\mathcal{L}_1$ de Gauss-Seidel pour la résolution du système (2) par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

6– Justifier que les valeurs propres de la matrice A^TA sont toutes réelles. On notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ces valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

7– Donner les valeurs propres des matrices J et $\mathcal{L}_1$ en fonction de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et α.

8– En déduire des conditions suffisantes de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système linéaire (2).

$\square$

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – Analyse Numérique Date : 4 Janvier 2008

Enseignants : H. EL FEKIH – N. GMATI – R. OUANES – H. SELLAMI Durée : **1h30**

Classe : **1ère A GC - GI - HYDMETEO — 2ème A GM** **Documents non autorisés**

Exercice 1

On considère le système linéaire $Ax = b$, avec A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1– Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss le système linéaire $Ax = b$.

2– Vérifier que la matrice A est à diagonale dominante stricte. En déduire que les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel, pour la résolution de $Ax = b$, sont convergentes.

3– Calculer les valeurs propres de A et en déduire qu'elle est définie positive.

4– Que peut on dire sur la convergence de la méthode itérative de la relaxation avec $\omega \in]0, 2[$ pour la résolution de $Ax = b$.

On considère dans la suite, la méthode du gradient à pas constant r pour la résolution du système linéaire $Ax = b$:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^3 \\ x^{(n+1)} = x^{(n)} - r\nabla J(x^{(n)}), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

où $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ ($(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$).

5– Pour quelles valeurs de r, l'algorithme (1) est il convergent?

6– Donner la valeur r^* du pas, assurant la convergence la plus rapide de l'algorithme (1).

7– On prend $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ et $r = 1/3$. Donner l'expression de $x^{(n+1)}$ en fonction de $x^{(n)}$, A et b. Quelle est sa limite lorsque $n \to +\infty$?.

8– On prend $x^{(0)} = (-1, 1, 2)^T$ et $r = 1/2$. Calculer les trois premiers termes de la suite $(x^{(n)})_{n\geq 1}$ générée par la méthode (1). En déduire le terme général $x^{(n)}$.
Est ce que la suite $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$?. Expliquez.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = f(x, y), \ x \in [0, b] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

où b est un nombre réel > 0 et $f : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x, y) = y$.

1– Montrer que (E) admet une unique solution, qu'on notera Y. Donner l'expression de $Y(x)$ pour tout $x \in [0, b]$.

Pour résoudre numériquement (E), on propose le schéma suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2} f(x_n, y_n) + \dfrac{h}{2} f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)), \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

où $h = b/N$ et $x_n = nh$, $n = 0, \cdots, N$ ($N \in \mathbb{N}^*$ fixé). y_n désigne une approximation de $Y(x_n)$.

2– Montrer que le schéma (S) est stable et consistant avec l'équation différentielle (E).

3– En déduire que le schéma (S) est convergent.

4– Montrer que le schéma (S) est d'ordre (au moins) 2. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ (indépendante de h) telle que

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - Y(x_n)| \leq K\, h^2$$

5– Donner l'expression de y_{n+1} en fonction de y_n, n et h. En déduire l'expression de y_n en fonction de h et de n.

6– On prend $b = 0,4$. Calculez, en utilisant le schéma (S), une approximation de $Y(b)$ pour $h = 0,2$ et $h = 0,1$. Commentez le résultat trouvé.
Pour celles et ceux qui n'ont pas de calculatrice ! :
$exp(0,4) \approx 1,4918;\ (1,105)^4 \approx 1,4909;\ (1,22)^2 = 1,4884$

□

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – Session de Rattrapage – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 6 Juin 2008

Enseignants : H. EL FEKIH – N. GMATI – M. JAOUA – M. MOAKHER – R. OUANES – H. SELLAMI

Classe : **1ère A GE - GC - GI - HYDMETEO - INFO - TELEC — 2ème A GM**

Durée : **1H30** **Documents non autorisés**

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre 4 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

1- Montrer que A ainsi que toutes ses sous-matrices sont inversibles. En déduire que A admet une factorisation LU.

2- Calculer L et U. Comparer la structure des matrices L et U obtenues avec celle de A.

3- Si on considère maintenant une matrice inversible d'ordre n avec la structure suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \beta_1 \\ & \alpha_2 & & & \beta_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où les termes manquants sont des zéros. Les coefficients α_i, β_i et γ_i sont des réels non nuls donnés.
On suppose que B admet une factorisation LU.
Quelle est la structure des matrices L et U ? Justifier votre réponse.

Rappel : On rappelle qu'à l'étape p de la factorisation LU, la p-ème ligne de U et la p-ème colonne de L sont déterminées comme suit :

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} \ell_{pk} u_{kj}, \ p \leq j \qquad \ell_{ip} = \left(a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} \ell_{ik} u_{kp} \right) / u_{pp}, \ p < i.$$

Exercice 2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, une matrice à diagonale strictement dominante :

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\}, \qquad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

On décompose la matrice A sous la forme $A = D - E - F$, où $D = \mathrm{diag}(a_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ et où les coefficients des matrices $E = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $F = (f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont donnés par :

$$e_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases} \quad , \quad f_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases}$$

... suite

On considère le système linéaire $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, et la méthode itérative de relaxation dont une itération est donnée par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \\ x^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(k)} + \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} b, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

où la matrice de relaxation $\mathcal{L}_\omega$ est donnée par :

$$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{w} D + F\right), \qquad \omega \in \mathbb{R}^*.$$

On suppose dans toute la suite que $\omega \in]0, 1]$.

On pose $L = D^{-1}E$ et $U = D^{-1}F$.

1–a Vérifier que la matrice L (respectivement U) est triangulaire inférieure (respectivement supérieure).

1–b Montrer qu'on peut écrire $\mathcal{L}_\omega$ sous la forme : $\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}((1-\omega)I + \omega U)$, où I désigne la matrice identité d'ordre n.

1–c Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I) = (-1)^n (\lambda + \omega - 1)^n \det(I - \alpha L - \beta U)$$

où

$$\alpha = \frac{\lambda\omega}{\lambda + \omega - 1} \quad , \quad \beta = \frac{\omega}{\lambda + \omega - 1} \tag{1}$$

1–d En déduire que si λ est une valeur propre de $\mathcal{L}_\omega$ telle que $|\lambda| \geq 1$, alors on a $\det(I - \alpha L - \beta U) = 0$

2– Montrer que si $|\lambda| \geq 1$, alors la matrice $I - \alpha L - \beta U$ est à diagonale dominante.
Remarque : si λ vérifie $|\lambda| \geq 1$, alors $|\beta| \leq |\alpha| \leq 1$.

3– En déduire que la méthode itérative de relaxation est convergente.

$\square$

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – Analyse Numérique Date : 7 Janvier 2009

Enseignants : H. EL FEKIH – M. MOAKHER Durée : **1H30**

Classes : **2ème A GM** **Documents non autorisés**

Exercice 1 [*Barème :* **1–** (1 pt), **2–a** (2 pts), **2–b** (2 pts), **2–c** (1 pt)]

Soit $g \in C^2([-1,1])$ et Q le polynôme d'interpolation d'Hermite de g au point -1 vérifiant :

$$Q(-1) = g(-1) \qquad \text{et} \qquad Q'(-1) = g'(-1)$$

1– Déterminer l'expression de Q.

2– On considère la formule d'intégration numérique suivante :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \alpha g(-1) + \beta g'(-1) + E(g) \tag{1}$$

où $E(g)$ désigne l'erreur de la formule d'intégration numérique, α et β sont des réels à déterminer.

2–a Déterminer α et β pour que la formule (1) soit de degré au moins 1.

2–b Montrer qu'il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que $E(g) = \frac{4}{3}g''(\eta)$.

Indication : On rappelle que pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $\xi_t \in [-1,1]$, dépendant de t, tel que $g(t) - Q(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 g''(\xi_t)$.

2–c La formule de quadrature (1) peut elle être de degré 2? (justifiez votre réponse).

Exercice 2 [*Barème :* **1–** (2 pts), **2–** (2 pts), **3–** (3 pts)]

Soit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|u\|_2 < 1$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice donnée par $A = uu^t$.

1– Montrer que $|||A|||_2 = \|u\|_2^2$, où $|||\cdot|||_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_2$.

2– En déduire que la matrice $I - A$ est inversible, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3– On prend ici $\|u\|_2 = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $|||(I-A)^{-1}|||_2 \le \dfrac{4}{3}$ et que $(I-A)^{-1} = I + \dfrac{4}{3}A$.

Exercice 3 [*Barème :* **1–** (2 pts), **2–** (3 pts), **3–** (2 pts)]

Soient n et m deux entiers non nuls, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles admettant chacune la factorisation "LU" :

$$A = L_A U_A, \qquad \begin{array}{ll} L_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

$$B = L_B U_B, \qquad \begin{array}{ll} L_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire inférieure à diagonale unité} \\ U_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) & \text{triangulaire supérieure} \end{array}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ définie (par blocs) comme suit :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right)$$

où O désigne une matrice identiquement nulle.

1– Montrer que M est inversible.

2– Montrer que la matrice M admet une factorisation "LU" unique : $M = L_M U_M$, où les matrices L_M et U_M sont à déterminer (en fonction des matrices L_A, U_A, L_B et U_B).

3– Décrire une méthode pour résoudre le système linéaire $Mx = b$, où $b \in \mathbb{R}^{n+m}$, et donner le nombre d'opérations élémentaires.

□

E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

Examen – Session de Rattrapage – ANALYSE NUMÉRIQUE Date : 10 Juin 2009

Classes : **2ème A GM - 1ère A GE - GC - GI - HYDMETEO - INFO - TELEC**

Durée : **1H30** **Documents non autorisés**

Barême :

Exercie 1 : **1-** (1 pt), **2-a** (1 pt), **2-b** (1 pt), **3-** (2 pts), **4-** (2 pts), **5-a** (1 pt), **5-b** (1 pt), **6-** (1 pt)

Exercie 2 : **1-a** (1 pt), **1-b** (1 pt), **2-a** (2 pts), **2-b** (2 pts), **2-c** (2 pts), **2-d** (0,5 pt), **2-e** (1,5 pts)

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On se donne la matrice symétrique A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1- Pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible ?

2-a Calculer, en fonction de a, les valeurs propres de A.

2-b En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est définie positive.

3- Pour quelles valeurs de a la matrice A admet-elle une factorisation LU?

Dans la suite, on se place dans le cas où A est inversible. On considère la décomposition $A = D - E - F$, où les matrices D, E et F sont données par

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4- Pour quelles valeurs de a, la méthode de Jacobi de matrice $J = D^{-1}(E + F)$, converge pour la résolution d'un système linéaire de matrice A?

5-a Pour quelles valeurs de a, a-t-on $\rho(\mathcal{L}_1) = (\rho(J))^2$? (où $\rho(.)$ désigne le rayon spectral d'une matrice, et $\mathcal{L}_1$ la matrice de Gauss-Seidel).

5-b En déduire les valeurs de a, pour lesquelles la méthode de Gauss-Seidel de matrice $\mathcal{L}_1$, converge pour la résolution d'un système linéaire de matrice A.

6- Donner une condition suffisante (sur a), pour que la méthode de relaxation avec un paramètre $w \in]0, 2[$, converge pour la résolution d'un système linéaire de matrice A.

Exercice 2

1– Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{array}{ll} b_{ij} \geq 0, & 1 \leq i,j \leq n \\ \|B\|_\infty \equiv \max\limits_{1\leq i\leq n}(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}) < 1 & \end{array}$$

1–a Montrer que $I - B$ est inversible.

1–b Montrer que $(I - B)^{-1}$ est à coefficients positifs ou nuls (I désigne la matrice identité).

2– Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficients réels, vérifiant :

$$\begin{array}{ll} a_{ii} > 0, & 1 \leq i \leq n \\ a_{ij} \leq 0, & 1 \leq i \neq j \leq n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} > 0, & 1 \leq i \leq n \end{array}$$

et soit D la matrice diagonale définie par:

$$d_{ii} = a_{ii},\ 1 \leq i \leq n, \qquad d_{ij} = 0,\ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

2–a Montrer que A est à diagonale dominante stricte (i.e. $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ \forall\, i = 1,\cdots,n$).

2–b Montrer que D est inversible.

2–c On pose $C = D^{-1}A$. Calculer les coefficients $(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de C.

2–d Montrer que C est inversible.

2–e Montrer que les coefficients de C^{-1} sont positifs ou nuls.

$\square$