ENIT Mai 2018

Durée 2H

Examen Statistiques
Session principale

Nombre de Pages : 1+tables

Exercice 1. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de poisson de paramètre α si X est entière ($X(\Omega) = \mathbb{N}$) et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}.$$

1. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de même loi que X. Montrer que l'estimateur de maximum de vraisemblance de α est $\hat{\alpha} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. Vérifier que $\hat{\alpha}$ est sans biais et convergent.
3. Donner un intervalle de confiance pour α à 95%.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité f est définie pour $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{\lambda}{\theta^k}x^{k-1}\exp(-\frac{x}{\theta}),$$

(et vaut 0 si $x \leq 0$), où θ est un paramètre réel strictement positif, $\lambda > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ des constantes.
On rappelle que, pour tout entier k,

$$\int_0^\infty x^k \exp(-x)dx = k!$$

1. Montrer que $\lambda = \frac{1}{(k-1)!}$.
2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de même loi que X, et soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ sa moyenne empirique. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ est $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{k}$.
3. Montrer qu l'espérance et la variance de $\hat{\theta}$ sont données par
$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ et $\mathbb{V}(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{nk}$.
4. Est-ce que l'estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais ? Est-il convergent ?
5. Calculer la quantité d'information de Fisher.
6. En déduire que $\hat{\theta}$ est efficace (c-à-d. optimal).

Exercice 3. On veut étudier la proportion p de gens qui vont au cinéma chaque mois. On prend donc un échantillon de taille $n = 100$. Soit N le nombre de personnes dans l'échantillon qui vont au cinéma mensuellement, donc $N = \sum_{i=1}^{100} X_i$, avec $X_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ personne va au cinéma (et 0 sinon).
Soit $\overline{X}_n = \frac{N}{n}$.

1. Donner une approximation gaussienne de la loi de $\overline{X}_n$ (en la justifiant).
2. Construire un intervalle de confiance pour p, de niveau de confiance $1 - \alpha$ (pour $\alpha \in [0, 1]$).
3. Le calculer pour $\alpha = 98\%$.