ENIT

Mai 2017
Durée 2 H

Examen de Statistiques
Session principale

Nombre de Pages : 1+ Table de loi Normale

Exercice 1. (6 points)
Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de poids de paquets de couscous de loi normale d'écart-type égal à $\sigma = 0.05$ kg et de moyenne inconnue m. La moyenne empirique est notée

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de m et calculer $\mathbb{V}(\overline{X_n})$.
2. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 90% pour m.
3. Déterminer n pour que la largeur de cet intervalle soit égale à 0,001.

Problème.(14 points)
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi (appelée Pareto) de densité :

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{[1,+\infty[}(x),$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre.

1. Vérifier que f_α est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X_i) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1}, \text{ si } \alpha > 1 & ; \\ \infty, \text{ sinon} \end{cases}$
   et $\mathbb{E}(X_i^2) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-2}, \text{ si } \alpha > 2 & ; \\ \infty, \text{ sinon} & . \end{cases}$
3. Déduire un estimateur $\tilde{\alpha}_n$ de α par méthode des moments.
4. Montrer qu'il est convergent.
5. Calculer la fonction de vraisemblance des X_i.
6. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de α est donnné par $\widehat{\alpha_n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\log(X_k)}$.
7. Montrer que $Y = \log(X_1)$ est de loi exponentielle de paramètre α, c-à-d de densité : $f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y} 1_{]0,+\infty[}(y)$.
8. Montrer que $\mathbb{E}(\log(X_1)) = \frac{1}{\alpha}$ et $\mathbb{E}((\log(X_1))^2) = \frac{2}{\alpha^2}$.
9. Montrer que l'estimateur $\widehat{\alpha_n}$ est convergent.
10. Montrer que l'information de fisher $I_n = \frac{n}{\alpha^2}$.
11. On admet que $Z = \frac{\widehat{\alpha_n}-\alpha}{\frac{\widehat{\alpha_n}}{\sqrt{n}}}$ est asymptotiquement de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (quand $n \to +\infty$). Construire un intervalle de confiance de niveau 95% pour α.