1

Correction Examen de Statistiques

Ex 1 :

1) $\boxed{\bar{X}_n = \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \Longrightarrow \boxed{Z = \mathcal{N}(0,1)}$

2) a) $\mathbb{P}(|Z| \leq x) = \frac{95}{100}$

$\iff 2\,F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) - 1 = 0,95$

$\iff F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = 0,975 \iff x = 1,96$

Or $\mathbb{P}\left(-x \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq x\right) = 0,95$

$\iff \mathbb{P}\left(m \in \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x,\ \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x\right]\right) = 0,95$

pour $\bar{x}_n = 55,083$, $n = 36$ et $\sigma = 2,683$

$\Longrightarrow \boxed{I_{0,95} = [54,207 ; 55,96]}$

b) $\alpha = 0,1$

étape 1 : $H_0 : m = m_0$ et $H_1 : m \neq m_0$

②

étape2 : Seuil de signification $\alpha = 0,1$

étape3 : Condition échantillon grand taille de la normale

étape4 : Statistique choisie $Z = \dfrac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

étape5 : Règle de décision

$\mathbb{P}(|Z| > z_\alpha) = 0,1 \iff$

$\cancel{\mathbb{P}(|Z|}\ 2F_{N(0,1)}(z_\alpha) - 1 = 0,9$

$\iff F_{N(0,1)}(z_\alpha) = \dfrac{1 + 0,9}{2} = 0,95$

$\iff \begin{cases} z_\alpha = 1,65 \text{ ou } \cancel{z_\alpha = 2,58} \\ \text{si } |Z| > z_\alpha \Longrightarrow \text{Rejet de } H_0 \\ \text{si } |Z| \leq z_\alpha \Longrightarrow \text{Non Rejet de} \end{cases}$

~~Calcul~~

~~étape~~

étape6 : Calcul de l'écart réduit

$$\frac{\bar{x}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(55,083 - 56)\sqrt{36}}{2,683} = -2,0$$

étape 7 : $|2{,}0{,}5| > 1{,}65$

donc on rejette H_0

Ex 2 :

1/ $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-x/\theta} \, dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^{+\infty} + \cancel{\frac{1}{\theta}} \int_0^{+\infty} e^{-x/\theta}$

$u(x) = \frac{x}{\theta} \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{\theta}$

$v'(x) = e^{-x/\theta} \longrightarrow v(x) = -\theta e^{-x/\theta}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \cancel{\frac{1}{\theta}} \left[-\theta e^{-x/\theta}\right]_0^{+\infty} = \theta$

$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-x/\theta} \, dx$

$u(x) = \frac{x^2}{\theta} \longrightarrow u'(x) = \frac{2x}{\theta}$

$v'(x) = e^{-x/\theta} \longrightarrow v(x) = -\theta e^{-x/\theta}$

$\mathbb{E}(X^2) = \left[u(x)v(x)\right]_0^{+\infty} + 2\theta \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-x/\theta} \, d\theta}_{\mathbb{E}(X)}$

$= 2\theta \times \theta = 2\theta^2$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \theta^2$

2/ (a) Soit $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$

$$\log L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}}\right) \cancel{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i > 0}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\log\theta - \frac{x_i}{\theta}\right) \cancel{+ \log \mathbb{1}_{\{x_i > 0\}}}$$

$$= -n\log\theta - \frac{1}{\theta}\sum x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} = 0$$

$$\iff n\theta = \sum x_i \iff \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

et $$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i \Big/_{\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$= \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} n\theta = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$

donc $\theta^{EMV} = \bar{X}_n$

(b) $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \theta$

$$\mathbb{V}(\theta^{EMV}) = \mathbb{V}(\bar{X}_n) \overset{\text{indépendante}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$$

$$= \frac{n\theta^2}{n^2} = \frac{\theta^2}{n}$$

3) $\mathbb{E}(\theta^{EMV}) = \theta \Rightarrow \theta^{EMV}$ est un estimateur sans biais

θ_θ^{EMV}

(X_i) sont des variable aléatoire indépendante de même loi d'après la loi des grands nombre $\theta_\theta^{EMV} = \bar{X}_n$ est un estimateur convergente de $\theta = \mathbb{E}(X_1)$

Ou bien

4) $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{V}(\theta^{EMV}) = \frac{\theta^2}{n} \longrightarrow 0$

donc θ^{EMV} est un estimateur convergente

6

d) $I_n(\theta) = \mathbb{V}\left(\dfrac{\partial \log f(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta}\right)$

$= \mathbb{V}\left(-\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \dfrac{1}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \dfrac{n\theta^2}{\theta^4} = \dfrac{n}{\theta^2}$

e) $R_{\theta^{EMV}}(\theta) = \mathbb{V}(\theta^{EMV}) = \dfrac{\theta^2}{n} = \dfrac{1}{I_n(\theta)}$

donc θ^{EMV} est un estimateur efficace.

Exercice 3 :

1/ $\mathbb{E}(X) = \int_0^\theta \frac{x}{\theta}\,dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\theta = \frac{\theta}{2}$.

$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\theta \frac{x^2}{\theta}\,dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{3}$

$\mathbb{V}(X) = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$

2/ (a) ~~On~~ $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{\theta}{2}$.

donc $\bar{X}_n$ est un estimateur biaisé de θ

et $\mathbb{V}(\bar{X}_n) \overset{\text{indépendantes}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \frac{\theta^2}{12n}$

(b) $\mathbb{E}(\tilde{\theta}_1) = \mathbb{E}(2\bar{X}_n) = \theta \Longrightarrow$

$\tilde{\theta}_1$ est un estimateur sans biaisé de θ

$\bar{X}_n$ est un estimateur convergente de $\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_1$ " " " de θ.

3/ $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)$

$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x_1, \dots, x_n)$

$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0 \le \inf x_i]} \mathbb{1}_{[\max_i \le \theta]}$

$L(x_1, \dots, x_n, \theta)$ est maximum $\iff \theta$ est minimum.

$\iff \theta = \max x_i$

donc l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $Y_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$

4/ a) $\mathbb{E}[Y_n] = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y_n}(y)\, dy$

$= \int_0^\theta n \frac{y^n}{\theta^n}\, dy = n \frac{1}{\theta^n} \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} \right]_0^\theta$

$= \frac{n\theta}{n+1}$

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \int_0^\theta n \frac{y^{n+1}}{\theta^n}\, dy = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{y^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{n\,\theta^2}{n+2}$$

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n\,\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\right)\theta^2$$

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\,\theta^2$$

b) $\mathbb{E}(\tilde{\theta}_2) = \frac{n+1}{n}\,\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n+1}{n} \times \frac{n\,\theta}{n+1}$

$$= \theta$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_2$ est un estimateur sans biais de θ

5/ $R_{\tilde{\theta}_1}(\theta) = \mathbb{V}(\tilde{\theta}_1)$ et $R_{\tilde{\theta}_2}(\theta) = \mathbb{V}(\tilde{\theta}_2)$

$= 4\,\mathbb{V}(\bar{X}_n)$ $\qquad$ $= \frac{(n+1)^2}{n^2}\,\mathbb{V}(Y_n)$

$= \frac{\theta^2}{3n}$ $\qquad$ $= \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$\Rightarrow R_{\tilde{\theta}_1}(\theta) \geq R_{\tilde{\theta}_2}(\theta)$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2$ est meilleur que $\tilde{\theta}_1$