Corrigé : Tests d'Hypothèses

Exercice 1

1. D'après les données de l'énoncé, $p_0 = 1/310000 \simeq 3.2310^{-6}$.
2. En supposant les X_i indépendants, la variable aléatoire N suit une loi binomiale de paramètres (n,p) avec $n = 300533$ et p de l'ordre de $p_0 = 3.2310^{-6}$. On peut donc approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre $\theta = np$. Dans le cas des études antérieures, on a $\theta_0 = np_0 \simeq 0.969$.
3. Sous l'hypothèse H_0, N suit une loi de Poisson de paramètre θ_0. Le risque de première espèce est donné par :
   $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(N \geq N^{\text{obs}}) = 1 - \sum_{k<N^{\text{obs}}} \frac{\theta_0^k}{k!} \mathrm{e}^{-\theta_0}$
   On obtient $\alpha \simeq$7.47% pour $N^{\text{obs}} = 3$, et $\alpha \simeq$1.71% pour $N^{\text{obs}} = 4$. Comme on a observé 4 cas de dommages, le risque de première espèce α de ce test est environ 1.71%. En particulier, on accepte l'hypothèse H_1 au seuil de 5%.

Exercice 2

1- Hypothèse Statistique :
$H_0 : \mu = 10000$
$H_1 : \mu \neq 10000$
2- Seuil de signification :
$\alpha = 0.05$
3- Condition d'application du test :
Grand échantillon provenant d'une population normale de variance connue.
4- La statistique :
La statistique qui convient pour le test est $\bar{X}_n$ l'écart réduit est $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ où $\mu_0 = 10000$ et Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
5- Règle de décision :
D'après H_1 et au seuil $\alpha = 0.05$ les valeurs critiques de l'écart réduit sont $z_{\alpha/2} = 1.96$ et $-z_{\alpha/2} = -1.96$ (test bilatéral).
On adoptera la règle de décision suivante :
Rejeter H_0 si $Z > 1.96$ ou $Z < -1.96$, sinon ne pas rejeter H_0.
6- Calcul de l'écart réduit :
Puisque $\bar{X}_n = 10300$, $\sigma = 1200$ et $n = 100$, donc :
$Z = \sqrt{100}\frac{10300-10000}{1200} = 2.5$
7- Décision et conclusion :
La valeur de $Z = 2.$ se situe dans la région de rejet de H_0 donc rejette l'affirmation. L'écart observé entre $\bar{X}_n$ et μ_0 soit (10300- 10000= 300), est statistiquement significatif au seuil $\alpha = 0.05$.