

Estimation Paramétrique

Exercice 1

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. Calculer les estimateurs par moments (EMM) et par maximum de vraisemblance (EMV) pour les lois et paramètres θ suivants :

1. Bernoulli $\mathcal{B}(p)$; $\theta = p \in [0, 1]$.
2. Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$; $\theta = \lambda > 0$.
3. Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$; $\theta = \frac{1}{\lambda} > 0$.
4. Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$; $\theta = (m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
5. Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$; $\theta = (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Préciser dans chaque cas si l'estimateur est sans biais, efficace, normal (à n fixé et asymptotiquement).

Exercice 2

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de carré intégrable. Trouver l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de la moyenne $\theta = \mathbb{E}(X_1)$, qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs sans biais et linéaires ($\hat{\theta}_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k$).

Exercice 3

Le total des ventes mensuelles d'un produit dans un magasin $i \in \{1, \dots, n\}$ est modélisée par une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(m_i, \sigma^2)$. On suppose connues $m_i > 0$ et $\sigma > 0$. Après une campagne publicitaire, les ventes sont augmentées, et vaut X_i pour le magasin i . On suppose les X_i indépendantes.

1. On suppose que l'augmentation est additive pour la moyenne, *i.e.* $X_i \sim \mathcal{N}(\alpha + m_i, \sigma^2)$. Déterminer l'EMV de α . Donner sa loi et ses propriétés.
2. On suppose que l'augmentation est multiplicative pour la moyenne, *i.e.* $X_i \sim \mathcal{N}(\beta m_i, \sigma^2)$. Soit l'estimateur $\hat{\beta}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{m_i}$. Donner sa loi et ses propriétés.
3. Déterminer l'EMV de β . Donner sa loi et ses propriétés.
4. Application numérique (tableau 1), avec $n = 15$ et $\sigma = 12$: calculer les trois estimateurs, en donnant des intervalles de confiance à 95%.

| | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| m_i | 1023 | 981 | 1034 | 1007 | 988 | 1021 | 1005 | 995 |
| x_i | 1109 | 1075 | 1129 | 1123 | 1092 | 1087 | 1129 | 1122 |
| m_i | 1020 | 1013 | 1030 | 1046 | 1003 | 1039 | 968 | |
| x_i | 1105 | 1124 | 1103 | 1072 | 1065 | 1069 | 1098 | |

TABLE 1 – Effet d'une campagne publicitaire sur les ventes.

Exercice 4

1. Soient U et V deux v.a. indépendantes de loi respectivement $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et $\mathcal{G}(b, \lambda)$.
 - (a) Vérifier que la v.a. $U + V$ est de loi $\mathcal{G}(a + b, \lambda)$.
 - (b) Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifier que la v.a. cU est de loi $\mathcal{G}(a, \frac{\lambda}{c})$.
2. Soient X et U deux variables aléatoires réelles indépendantes et de loi respectivement $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{G}(a, \lambda)$.
 - (a) Vérifier que la densité de la v.a. X^2 est de loi $\mathcal{G}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
 - (b) On pose $T = \frac{X}{\sqrt{U}}$ et $S = \sqrt{U}$.
 - i. Déterminer la densité du couple (T, S) .
 - ii. Déterminer la densité de la v.a. T .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Soient X_1, \dots, X_n et Y ($n+1$) v.a. réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - (a) En déduire sans calcul à partir de 1b) et 2a) la densité de la v.a. $X_1^2 + \dots + X_n^2$. (La loi de $X_1^2 + \dots + X_n^2$ est appelée loi Khi-deux à n degrés de liberté.)
4. En déduire sans calcul la densité de la v.a. $\frac{Y}{\sqrt{\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n}}}$ (loi de Student).

Exercice 5

L'expérience montre que 40% des usines respectent les normes d'hygiène et de sécurité. On contrôle au cours d'une certaine période n usines.

1. Pour quelle valeurs de n , la proportion d'usines respectant les normes d'hygiène et de sécurité se situe entre 35% et 45% avec une probabilité au moins égale à 0.9.
2. On contrôle 128 usines et on observe que 72 d'entre-elles respectent les normes d'hygiène et de sécurité. Trouver un intervalle de confiance de niveau 95% pour la proportion d'usines respectant les normes d'hygiène.

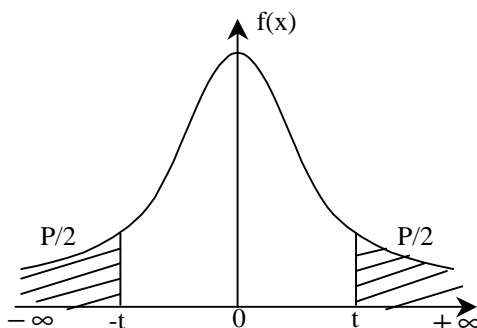
Exercice 6

Dans un lot de pièces fabriquées en série le diamètre X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

1. Sachant qu'un échantillon de taille $n = 26$ permet de calculer $\bar{x} = 62$ et $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 1.132$. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 95% pour σ^2 .
2. Chercher, à partir du même échantillon, un intervalle de confiance de niveau 90% pour m .

Loi de Student

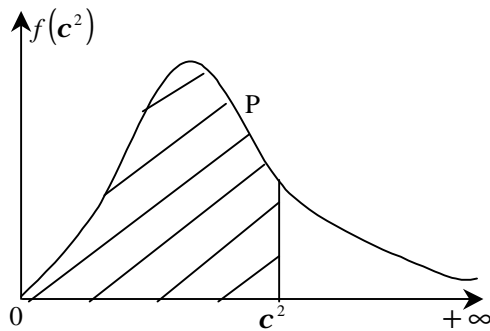
Valeurs de t ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue.



| $n \setminus P$ | 90% | 80% | 70% | 60% | 50% | 40% | 30% | 20% | 10% | 5% | 1% |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 1 | 0,1584 | 0,3249 | 0,5095 | 0,7265 | 1,0000 | 1,3764 | 1,9626 | 3,0777 | 6,3137 | 12,7062 | 63,6559 |
| 2 | 0,1421 | 0,2887 | 0,4447 | 0,6172 | 0,8165 | 1,0607 | 1,3862 | 1,8856 | 2,9200 | 4,3027 | 9,9250 |
| 3 | 0,1366 | 0,2767 | 0,4242 | 0,5844 | 0,7649 | 0,9785 | 1,2498 | 1,6377 | 2,3534 | 3,1824 | 5,8408 |
| 4 | 0,1338 | 0,2707 | 0,4142 | 0,5686 | 0,7407 | 0,9410 | 1,1896 | 1,5332 | 2,1318 | 2,7765 | 4,6041 |
| 5 | 0,1322 | 0,2672 | 0,4082 | 0,5594 | 0,7267 | 0,9195 | 1,1558 | 1,4759 | 2,0150 | 2,5706 | 4,0321 |
| 6 | 0,1311 | 0,2648 | 0,4043 | 0,5534 | 0,7176 | 0,9057 | 1,1342 | 1,4398 | 1,9432 | 2,4469 | 3,7074 |
| 7 | 0,1303 | 0,2632 | 0,4015 | 0,5491 | 0,7111 | 0,8960 | 1,1192 | 1,4149 | 1,8946 | 2,3646 | 3,4995 |
| 8 | 0,1297 | 0,2619 | 0,3995 | 0,5459 | 0,7064 | 0,8889 | 1,1081 | 1,3968 | 1,8595 | 2,3060 | 3,3554 |
| 9 | 0,1293 | 0,2610 | 0,3979 | 0,5435 | 0,7027 | 0,8834 | 1,0997 | 1,3830 | 1,8331 | 2,2622 | 3,2498 |
| 10 | 0,1289 | 0,2602 | 0,3966 | 0,5415 | 0,6998 | 0,8791 | 1,0931 | 1,3722 | 1,8125 | 2,2281 | 3,1693 |
| 11 | 0,1286 | 0,2596 | 0,3956 | 0,5399 | 0,6974 | 0,8755 | 1,0877 | 1,3634 | 1,7959 | 2,2010 | 3,1058 |
| 12 | 0,1283 | 0,2590 | 0,3947 | 0,5386 | 0,6955 | 0,8726 | 1,0832 | 1,3562 | 1,7823 | 2,1788 | 3,0545 |
| 13 | 0,1281 | 0,2586 | 0,3940 | 0,5375 | 0,6938 | 0,8702 | 1,0795 | 1,3502 | 1,7709 | 2,1604 | 3,0123 |
| 14 | 0,1280 | 0,2582 | 0,3933 | 0,5366 | 0,6924 | 0,8681 | 1,0763 | 1,3450 | 1,7613 | 2,1448 | 2,9768 |
| 15 | 0,1278 | 0,2579 | 0,3928 | 0,5357 | 0,6912 | 0,8662 | 1,0735 | 1,3406 | 1,7531 | 2,1315 | 2,9467 |
| 16 | 0,1277 | 0,2576 | 0,3923 | 0,5350 | 0,6901 | 0,8647 | 1,0711 | 1,3368 | 1,7459 | 2,1199 | 2,9208 |
| 17 | 0,1276 | 0,2573 | 0,3919 | 0,5344 | 0,6892 | 0,8633 | 1,0690 | 1,3334 | 1,7396 | 2,1098 | 2,8982 |
| 18 | 0,1274 | 0,2571 | 0,3915 | 0,5338 | 0,6884 | 0,8620 | 1,0672 | 1,3304 | 1,7341 | 2,1009 | 2,8784 |
| 19 | 0,1274 | 0,2569 | 0,3912 | 0,5333 | 0,6876 | 0,8610 | 1,0655 | 1,3277 | 1,7291 | 2,0930 | 2,8609 |
| 20 | 0,1273 | 0,2567 | 0,3909 | 0,5329 | 0,6870 | 0,8600 | 1,0640 | 1,3253 | 1,7247 | 2,0860 | 2,8453 |
| 21 | 0,1272 | 0,2566 | 0,3906 | 0,5325 | 0,6864 | 0,8591 | 1,0627 | 1,3232 | 1,7207 | 2,0796 | 2,8314 |
| 22 | 0,1271 | 0,2564 | 0,3904 | 0,5321 | 0,6858 | 0,8583 | 1,0614 | 1,3212 | 1,7171 | 2,0739 | 2,8188 |
| 23 | 0,1271 | 0,2563 | 0,3902 | 0,5317 | 0,6853 | 0,8575 | 1,0603 | 1,3195 | 1,7139 | 2,0687 | 2,8073 |
| 24 | 0,1270 | 0,2562 | 0,3900 | 0,5314 | 0,6848 | 0,8569 | 1,0593 | 1,3178 | 1,7109 | 2,0639 | 2,7970 |
| 25 | 0,1269 | 0,2561 | 0,3898 | 0,5312 | 0,6844 | 0,8562 | 1,0584 | 1,3163 | 1,7081 | 2,0595 | 2,7874 |
| 26 | 0,1269 | 0,2560 | 0,3896 | 0,5309 | 0,6840 | 0,8557 | 1,0575 | 1,3150 | 1,7056 | 2,0555 | 2,7787 |
| 27 | 0,1268 | 0,2559 | 0,3894 | 0,5306 | 0,6837 | 0,8551 | 1,0567 | 1,3137 | 1,7033 | 2,0518 | 2,7707 |
| 28 | 0,1268 | 0,2558 | 0,3893 | 0,5304 | 0,6834 | 0,8546 | 1,0560 | 1,3125 | 1,7011 | 2,0484 | 2,7633 |
| 29 | 0,1268 | 0,2557 | 0,3892 | 0,5302 | 0,6830 | 0,8542 | 1,0553 | 1,3114 | 1,6991 | 2,0452 | 2,7564 |
| 30 | 0,1267 | 0,2556 | 0,3890 | 0,5300 | 0,6828 | 0,8538 | 1,0547 | 1,3104 | 1,6973 | 2,0423 | 2,7500 |
| 40 | 0,1265 | 0,2550 | 0,3881 | 0,5286 | 0,6807 | 0,8507 | 1,0500 | 1,3031 | 1,6839 | 2,0211 | 2,7045 |
| 50 | 0,1263 | 0,2547 | 0,3875 | 0,5278 | 0,6794 | 0,8489 | 1,0473 | 1,2987 | 1,6759 | 2,0086 | 2,6778 |
| 60 | 0,1262 | 0,2545 | 0,3872 | 0,5272 | 0,6786 | 0,8477 | 1,0455 | 1,2958 | 1,6706 | 2,0003 | 2,6603 |
| 80 | 0,1261 | 0,2542 | 0,3867 | 0,5265 | 0,6776 | 0,8461 | 1,0432 | 1,2922 | 1,6641 | 1,9901 | 2,6387 |
| 100 | 0,1260 | 0,2540 | 0,3864 | 0,5261 | 0,6770 | 0,8452 | 1,0418 | 1,2901 | 1,6602 | 1,9840 | 2,6259 |
| 120 | 0,1259 | 0,2539 | 0,3862 | 0,5258 | 0,6765 | 0,8446 | 1,0409 | 1,2886 | 1,6576 | 1,9799 | 2,6174 |
| 200 | 0,1258 | 0,2537 | 0,3859 | 0,5252 | 0,6757 | 0,8434 | 1,0391 | 1,2858 | 1,6525 | 1,9719 | 2,6006 |
| ∞ | 0,1257 | 0,2533 | 0,3853 | 0,5244 | 0,6745 | 0,8416 | 1,0364 | 1,2816 | 1,6449 | 1,9600 | 2,5758 |

Loi du c^2

Valeur de c^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.



| ddl/P | 0,5% | 1,0% | 2,5% | 5,0% | 10,0% | 50,0% | 90,0% | 95,0% | 97,5% | 99,0% | 99,5% |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,004 | 0,016 | 0,455 | 2,706 | 3,841 | 5,024 | 6,635 | 7,879 |
| 2 | 0,010 | 0,020 | 0,051 | 0,103 | 0,211 | 1,386 | 4,605 | 5,991 | 7,378 | 9,210 | 10,597 |
| 3 | 0,072 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 2,366 | 6,251 | 7,815 | 9,348 | 11,345 | 12,838 |
| 4 | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,064 | 3,357 | 7,779 | 9,488 | 11,143 | 13,277 | 14,860 |
| 5 | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,145 | 1,610 | 4,351 | 9,236 | 11,070 | 12,832 | 15,086 | 16,750 |
| 6 | 0,676 | 0,872 | 1,237 | 1,635 | 2,204 | 5,348 | 10,645 | 12,592 | 14,449 | 16,812 | 18,548 |
| 7 | 0,989 | 1,239 | 1,690 | 2,167 | 2,833 | 6,346 | 12,017 | 14,067 | 16,013 | 18,475 | 20,278 |
| 8 | 1,344 | 1,647 | 2,180 | 2,733 | 3,490 | 7,344 | 13,362 | 15,507 | 17,535 | 20,090 | 21,955 |
| 9 | 1,735 | 2,088 | 2,700 | 3,325 | 4,168 | 8,343 | 14,684 | 16,919 | 19,023 | 21,666 | 23,589 |
| 10 | 2,156 | 2,558 | 3,247 | 3,940 | 4,865 | 9,342 | 15,987 | 18,307 | 20,483 | 23,209 | 25,188 |
| 11 | 2,603 | 3,053 | 3,816 | 4,575 | 5,578 | 10,341 | 17,275 | 19,675 | 21,920 | 24,725 | 26,757 |
| 12 | 3,074 | 3,571 | 4,404 | 5,226 | 6,304 | 11,340 | 18,549 | 21,026 | 23,337 | 26,217 | 28,300 |
| 13 | 3,565 | 4,107 | 5,009 | 5,892 | 7,041 | 12,340 | 19,812 | 22,362 | 24,736 | 27,688 | 29,819 |
| 14 | 4,075 | 4,660 | 5,629 | 6,571 | 7,790 | 13,339 | 21,064 | 23,685 | 26,119 | 29,141 | 31,319 |
| 15 | 4,601 | 5,229 | 6,262 | 7,261 | 8,547 | 14,339 | 22,307 | 24,996 | 27,488 | 30,578 | 32,801 |
| 16 | 5,142 | 5,812 | 6,908 | 7,962 | 9,312 | 15,338 | 23,542 | 26,296 | 28,845 | 32,000 | 34,267 |
| 17 | 5,697 | 6,408 | 7,564 | 8,672 | 10,085 | 16,338 | 24,769 | 27,587 | 30,191 | 33,409 | 35,718 |
| 18 | 6,265 | 7,015 | 8,231 | 9,390 | 10,865 | 17,338 | 25,989 | 28,869 | 31,526 | 34,805 | 37,156 |
| 19 | 6,844 | 7,633 | 8,907 | 10,117 | 11,651 | 18,338 | 27,204 | 30,144 | 32,852 | 36,191 | 38,582 |
| 20 | 7,434 | 8,260 | 9,591 | 10,851 | 12,443 | 19,337 | 28,412 | 31,410 | 34,170 | 37,566 | 39,997 |
| 21 | 8,034 | 8,897 | 10,283 | 11,591 | 13,240 | 20,337 | 29,615 | 32,671 | 35,479 | 38,932 | 41,401 |
| 22 | 8,643 | 9,542 | 10,982 | 12,338 | 14,041 | 21,337 | 30,813 | 33,924 | 36,781 | 40,289 | 42,796 |
| 23 | 9,260 | 10,196 | 11,689 | 13,091 | 14,848 | 22,337 | 32,007 | 35,172 | 38,076 | 41,638 | 44,181 |
| 24 | 9,886 | 10,856 | 12,401 | 13,848 | 15,659 | 23,337 | 33,196 | 36,415 | 39,364 | 42,980 | 45,558 |
| 25 | 10,520 | 11,524 | 13,120 | 14,611 | 16,473 | 24,337 | 34,382 | 37,652 | 40,646 | 44,314 | 46,928 |
| 26 | 11,160 | 12,198 | 13,844 | 15,379 | 17,292 | 25,336 | 35,563 | 38,885 | 41,923 | 45,642 | 48,290 |
| 27 | 11,808 | 12,878 | 14,573 | 16,151 | 18,114 | 26,336 | 36,741 | 40,113 | 43,195 | 46,963 | 49,645 |
| 28 | 12,461 | 13,565 | 15,308 | 16,928 | 18,939 | 27,336 | 37,916 | 41,337 | 44,461 | 48,278 | 50,994 |
| 29 | 13,121 | 14,256 | 16,047 | 17,708 | 19,768 | 28,336 | 39,087 | 42,557 | 45,722 | 49,588 | 52,335 |
| 30 | 13,787 | 14,953 | 16,791 | 18,493 | 20,599 | 29,336 | 40,256 | 43,773 | 46,979 | 50,892 | 53,672 |
| 31 | 14,458 | 15,655 | 17,539 | 19,281 | 21,434 | 30,336 | 41,422 | 44,985 | 48,232 | 52,191 | 55,002 |
| 32 | 15,134 | 16,362 | 18,291 | 20,072 | 22,271 | 31,336 | 42,585 | 46,194 | 49,480 | 53,486 | 56,328 |
| 33 | 15,815 | 17,073 | 19,047 | 20,867 | 23,110 | 32,336 | 43,745 | 47,400 | 50,725 | 54,775 | 57,648 |
| 34 | 16,501 | 17,789 | 19,806 | 21,664 | 23,952 | 33,336 | 44,903 | 48,602 | 51,966 | 56,061 | 58,964 |
| 35 | 17,192 | 18,509 | 20,569 | 22,465 | 24,797 | 34,336 | 46,059 | 49,802 | 53,203 | 57,342 | 60,275 |

Lorsque $n > 30$ on peut admettre que la quantité $\sqrt{2c^2} - \sqrt{2n-1}$ suit une loi normale centrée réduite.