Echantillonnage

Exercice 1.

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$échantillon de loi de Bernoulli de paramètre θ

$$P(X_i = x_i) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \quad \forall x_i \in \{0,1\} \ , \ \theta \in]0,1[$$

1. Ecrire la vraisemblance de l'échantillon
2. Montrer que $T(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une statistique exhaustive pour θ

Exercice 2.

Pour chacune des lois suivantes, écrire la vraisemblance de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ et donner une statistique exhaustive.

1. Loi de Poisson de paramètre θ
2. Loi de Uniforme sur $[0, \theta]$

Exercice 3.

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$échantillon de loi Uniforme sur $\left[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right]$
Montrer que la statistique $T(X_1, ..., X_n) = (\max X_i, \min X_i)$ est exhaustive pour le paramètre θ.

Exercice 4.

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$échantillon issu d'une population de densité :

$$f_\theta(x_i) = \begin{cases} \theta e^{-x_i+\theta} & \text{si} \quad x_i > \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $T(X_1, ..., X_n) = \min X_i$ est une statistique exhaustive pour θ.

Exercice 5.

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$échantillon issu d'une population de densité :

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} x_i^{-(p+1)} e^{-\frac{\theta}{x_i}} & \text{si} \quad x_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $T\left(X_1,...,X_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}$ est une statistique exhaustive pour le paramètre θ.

Exercice 6.

Soit $(X_1,...,X_n)$ un $n-$échantillon ou X_i a pour densité :

$$f_\theta(x_i) = \begin{cases} \frac{\theta}{e^{\theta^2-1}}e^{\theta x_i} & \text{si} \qquad 0 \leq x_i \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $T\left(X_1,...,X_n\right) = \left(\max X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ est une statistique exhaustive pour θ est une statistique exhaustive pour le paramètre θ.

Exercice 7.

Soit $(X_1,...,X_n)$ un $n-$échantillon issu d'une population de densité :

$$f_\theta(x_i) = \begin{cases} \theta x_i^{\theta-1} & \text{si} \qquad 0 \leq x_i \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la statistique $T\left(X_1,...,X_n\right) = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est exhaustive.

Exercice 8.

Soit $(X_1,...,X_n)$ un $n-$échantillon de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer à partir de la définition d'exhaustivité que $T\left(X_1,...,X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une statistique exhaustive pour λ.
Refaire la même chose pour la loi de Bernoulli de paramètre p.

Exercice 10.

Soit $(X_1,...,X_n)$ un $n-$échantillon issu d'une population de densité :

$$f_\theta(x_i) = \begin{cases} 2\theta x_i e^{-\theta x_i^2} & \text{si} \qquad 0 \leq x_i \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la statistique $T\left(X_1,...,X_n\right) = \frac{n}{\sum X_i^2}$ est exhaustive pour θ.

Exercice 11.

Soit $(X_1,...,X_n)$ un $n-$échantillon issu d'une population de densité :

$$f_\theta(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta a^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si} \qquad 0 \leq x_i \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la statistique $T\left(X_1,...,X_n\right) = \frac{1}{n}\sum \ln\left(\frac{X_i}{a}\right)$ est exhaustive pour θ.