Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis | **05 Janvier 2017**
Année Universitaire 2016/2017 | **Durée 2h00**
Documents non autorisés | **Nombre de pages : 2+Table**
Calculatrice autorisée | **Session : Principale**

Examen de Statistiques

NB :
La rédaction et la clarté des résultats seront prises en compte.

Exercice 1
Dans un centre avicole, des études antérieures ont montré que la masse d'un oeuf choisi au hasard peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire normale X, de moyenne m et d'écart type **connu** $\sigma = 2.683$.
On admet que les masses des oeufs sont indépendantes les unes des autres. Soit X_i une variable aléatoire de même loi que X et qui correspond au poids de l'oeuf i.

1. Donner la loi de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ l'estimateur du paramètre m et en déduire la loi de $Z = (\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$.
2. On prend un échantillon de $n = 36$ oeufs que l'on pèse et on trouve que la moyenne emiprique $\bar{x}_n = 55.083$.
   (a) Donner un intervalle de confiance au niveau 95% du paramètre m.
   (b) Pour un seuil de signification $\alpha = 0.1$, on veut tester si la masse moyenne m d'un oeuf est égale ou non à $m_0 = 56$. Formuler le test d'hypothèses correspondant pour justifier votre réponse.

Exercice 2
La durée de fonctionnement d'un radiateur électrique est représentée par une variable aléatoire réelle X suivant une loi de densité :

$$f(x, \theta) = \frac{\exp(-\frac{x}{\theta})}{\theta}, \quad \forall x > 0.$$

avec $\theta > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \theta$ et que $\mathbb{V}(X) = \theta^2$.
2. On considère un échantillon $(X_1, .., X_n)$ de même loi que X.
   (a) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $\theta^{EMV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(\theta^{EMV})$ et $\mathbb{V}(\theta^{EMV})$.
   (c) L'estimateur θ^{EMV} est-il sans biais ? est-il convergent ?
   (d) Calculer l'information de Fisher $I_n(\theta) = \mathbb{V}(\frac{\partial \log f(X_1, \cdots, X_n; \theta)}{\partial \theta})$.
   (e) Déduire que θ^{EMV} est un estimateur efficace (donc de variance minimale) de θ.

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X qui représente la "durée d'attente à un feu rouge". La durée maximale d'attente à ce feu rouge est notée θ, paramètre inconnu strictement positif. On suppose que les variables aléatoires X_i qui représentent la durée d'attente d'un individu i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, \theta]$. (i.e. $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\theta} 1_{[0,\theta]}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}$ et que $\mathbb{V}(X) = \frac{\theta^2}{12}$.
2. Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ un estimateur de θ.
   (a) L'estimateur $\bar{X}_n$ est-il un estimateur sans biais de θ ? Vérifier que $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{\theta^2}{12n}$.
   (b) En déduire que $\tilde{\theta}_1 = 2\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.
3. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $Y_n = \sup_{1 \le i \le n} X_i$.
4. On admet que la densité de Y_n est $f_{Y_n}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} 1_{[0,\theta]}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{n+1}\theta$ et que $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$.
   (b) Montrer que $\tilde{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} Y_n$ est un estimateur sans biais de θ.
5. Lequel des deux estimateurs $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ choisiriez-vous pour estimer θ ? Justifier votre réponse.