Chapitre 6 Elasticité Linéaire

1. Elasticité linéaire – le tenseur d'élasticité:

a) Hypothèses:

H1 : les transformations sont supposées infinitésimales et les déplacements sont petits (H.P.P).
H2 : les évolutions du système matériel sont supposées isothermes ($T=T_0$).
H3 : la configuration initiale C_0 du système est supposée non chargée et non déformée (hypothèse simplificatrice). L'état initial est dit dans ce cas naturel.

b) Le comportement élastique linéaire:

Le comportement élastique linéaire est caractérisé par des relations linéaires entre les contraintes et les déformations :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}(\vec{x},t)=\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}(\vec{x}):\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{x},t)} \text{ ou } \boxed{\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{x},t)=\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\vec{x}):\overline{\overline{\sigma}}(\vec{x},t)}$$

Les tenseurs d'ordre 4 $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}$ et $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}$ sont les tenseurs d'élasticité. Ils caractérisent les propriétés élastiques du matériau et ils peuvent varier d'un point à un autre. Dans ce cas le matériau est dit hétérogène.

Le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}$ est appelé tenseur de rigidité.

Le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}$ est appelé tenseur de souplesse ou de complaisance.

Avec les composantes dans une base orthonormée $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, la loi de comportement élastique linéaire s'écrit : $\boxed{\sigma_{ij}(\vec{x},t)=R_{ijkl}(\vec{x})\,\varepsilon_{lk}(\vec{x},t)}$ ou $\boxed{\varepsilon_{ij}(\vec{x},t)=S_{ijkl}(\vec{x})\,\sigma_{lk}(\vec{x},t)}$.

Comme $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\overline{\overline{\varepsilon}}$ sont symétriques alors on a :

$$R_{ijkl}=R_{jikl},\quad R_{ijkl}=R_{ijlk},\quad S_{ijkl}=S_{jikl} \quad\text{et}\quad S_{ijkl}=S_{ijlk}.$$

De plus on suppose que :

- $R_{ijkl}=R_{klij}$ et $S_{ijkl}=S_{klij}$. (*Hypothèse thermodynamique*)
- $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}$ et $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}$ sont définis positifs c'est-à-dire $\forall\overline{\overline{T}}$ symétrique, si $\overline{\overline{T}}\neq\overline{\overline{0}}$ alors $\begin{cases}\overline{\overline{T}}:\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}:\overline{\overline{T}}>0\\ \overline{\overline{T}}:\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}:\overline{\overline{T}}>0\end{cases}$

  (*Hypothèse de stabilité*)

Compte tenu de ces relations de symétrie, le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}$ n'admet que 21 coefficients distincts. Il peut être représenté par une matrice 6x6 symétrique associée à la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}&a_{16}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}&a_{26}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}&a_{36}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}&a_{46}\\ a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}&a_{56}\\ a_{61}&a_{62}&a_{63}&a_{64}&a_{65}&a_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \quad \text{avec } a_{ij}=a_{ji}$$

2. Isotropie et anisotropie:

Un matériau est dit isotrope si toutes ses directions sont équivalentes. Dans ce cas le tenseur d'élasticité est indépendant du repère choisi.
Si au contraire, le matériau admet des directions privilégiées, il est dit anisotrope et le tenseur d'élasticité dépendra du repère choisi.
L'origine physique de l'anisotropie peut être liée :

- à la structure du matériau ; exemples les monocristaux métalliques, les matériaux composites, les matériaux fibreux naturels comme le bois.

- au procédé d'élaboration du matériau : pour des matériaux initialement isotropes, mais qui ont été rendus anisotropes par les traitements subis ; exemples les pièces métalliques obtenues par forgeage, les tôles laminées.

3. Exemples d'anisotropie:

a) Orthotropie :

Le matériau admet 3 directions privilégiées orthogonales. Dans la base associée aux directions d'orthotropie, la matrice d'élasticité ne fait intervenir que 9 coefficients:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \quad ; \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

Ce cas correspond à celui des tôles laminées et à celui des matériaux composites renforcés par 2 ou 3 systèmes de fibres dans des directions orthogonales.

b) Symétrie cubique:

C'est un cas particulier du précédent où les 3 directions privilégiées sont équivalentes. C'est le cas du monocristal d'un matériau cubique ou cubique à face centrée, c'est aussi le cas d'un matériau composite renforcé par 3 systèmes de fibres identiques.

Dans la base associée aux directions privilégiées, la matrice d'élasticité ne fait intervenir que 3 coefficients (a,b,c) :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & b & 0 & 0 & 0\\ b & a & b & 0 & 0 & 0\\ b & b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}$$

c) Isotropie transverse:

Le matériau admet une direction privilégiée (x_3 par exemple). C'est le cas des composites renforcés par des fibres unidirectionnelles, des composites stratifiés, le bois …

Dans une base ayant comme axe x_3, la direction privilégiée, la matrice d'élasticité fait intervenir 5 coefficients :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & e & 0 & 0 & 0\\ b & a & e & 0 & 0 & 0\\ e & e & d & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-b\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}$$

4. Elasticité linéaire isotrope - Loi de Hooke généralisée :

Dans le cas d'un matériau isotrope le tenseur d'élasticité $\overset{\equiv}{\overline{R}}$ doit rester invariant dans tout changement de base orthonormée. C'est-à-dire pour tout $\overline{\overline{Q}}$ orthogonale ($\overline{\overline{Q}}.\overline{\overline{Q}}^T=\overline{\overline{I}}$), on a :

$$\overline{\overline{Q}}.\overline{\overline{\sigma}}.\overline{\overline{Q}}^T=\overset{\equiv}{\overline{R}}:\left(\overline{\overline{Q}}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\overline{\overline{Q}}^T\right)$$

On montre dans ce cas que les composantes du tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}$ doivent être de la forme :

$$R_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right)$$

La loi de comportement élastique linéaire isotrope se met sous la forme :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \lambda\, trace(\overline{\overline{\varepsilon}})\,\overline{\overline{I}} + 2\,\mu\,\overline{\overline{\varepsilon}}}$$

Qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}}$$

On obtient la relation inverse en exprimant ε_{kk} en fonction de σ_{kk} :

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{kk} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{kk} = \sigma_{kk}/(3\lambda + 2\mu)$$

D'où $\boxed{\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \dfrac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}} \leftrightarrow \boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2\mu}\overline{\overline{\sigma}} - \dfrac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda+2\mu)} trace(\overline{\overline{\sigma}})\,\overline{\overline{I}}}$

La loi de comportement élastique linéaire isotrope (*E. L. I*) ne dépend que des deux coefficients λ et μ appelés coefficients d'élasticité de Lamé. On obtient la signification physique de ces coefficients en étudiant quelques états de contraintes et de déformations particuliers.

a) Tension ou compression hydrostatique:

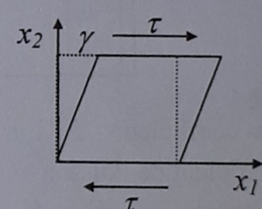
$$\sigma_{ij} = \sigma\,\delta_{ij} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon\,\delta_{ij} \qquad \text{avec} \quad \sigma = (3\lambda + 2\mu)\ \varepsilon$$

En posant $\boxed{3K = (3\lambda + 2\mu)}$, on obtient $\boxed{\sigma = 3K\ \varepsilon}$.

Le coefficient $3K$ représente le module de rigidité à la compression.

b) Glissement simple:

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix}0 & \gamma/2 & 0\\ \gamma/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix}0 & \mu\gamma & 0\\ \mu\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \tau & 0\\ \tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

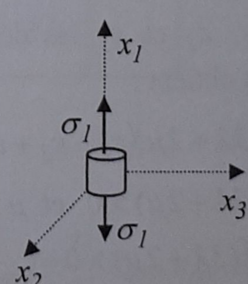


On obtient donc un état de cisaillement simple avec $\boxed{\tau = \mu\,\gamma}$.

Le coefficient μ représente alors le module de rigidité au cisaillement appelé aussi module de Coulomb et noté parfois G.

c) Traction simple:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix}\varepsilon_L & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_T & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_T\end{pmatrix}$$



$\varepsilon_L = \varepsilon_{11}$: Allongement (relatif) longitudinal.

$\varepsilon_T = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$: Contraction transversale.

Remarque : Dans le cas de l'essai de traction, le rapport $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$ représente l'allongement relatif global. Les essais montrent que cet allongement est égal à l'allongement local ε_L (dans la direction de traction) en tout point de la partie utile de l'éprouvette (Dans cette partie de l'éprouvette et dans la phase élastique les états de contrainte et de déformation sont homogènes).

En utilisant la loi de comportement, obtient les relations suivantes :

$$\varepsilon_L = \frac{\lambda + \mu}{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\sigma_1 \quad ; \qquad \varepsilon_T = \frac{-\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\sigma_1$$

On pose $\boxed{\varepsilon_L = \frac{\sigma_1}{E}}$ et $\boxed{\varepsilon_T = -\nu\,\varepsilon_L}$, avec :

$$\boxed{E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}} \qquad \boxed{\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}$$

Le coefficient E représente le module de rigidité à la traction appelé également module d'Young, c'est la pente de la partie rectiligne de la courbe de traction.
Le coefficient ν est le coefficient de Poisson, c'est le rapport entre la contraction transversale et l'allongement longitudinal.
On obtient λ, μ et K en fonction de E et ν par :

$$\boxed{\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}} \;; \qquad \boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}} \;; \qquad \boxed{3K = \frac{E}{(1-2\nu)}}$$

En utilisant le module d'Young et le coefficient de Poisson, la loi de comportement élastique linéaire isotrope s'écrit :

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\overline{\overline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}trace(\overline{\overline{\sigma}})\,\overline{\overline{I}}}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}}$$

Remarques :

- Les coefficients E, λ, μ, K sont homogènes à des contraintes (unité [N/m^2] ou [Pa]), le coefficient de Poisson ν est sans unité. Ces coefficients sont intrinsèques à chaque matériau.
- On montre que E, μ, K sont positifs et $-1 < \nu < 1/2$. Mais en pratique on a $0 < \nu < 1/2$. Le cas $\nu \to 1/2$ correspond aux matériaux incompressibles.

En effet comme le tenseur d'élasticité $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}$ est défini positif, alors $\forall \overline{\overline{\varepsilon}} \neq \overline{\overline{0}}$, on doit avoir $\overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} > 0$.

En notant ε_1, ε_2 et ε_3 les déformations principales et en exprimant $\overline{\overline{\varepsilon}}$ dans la base principale, on obtient :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} = \tfrac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \mu(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \tfrac{1}{3}\mu(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 > 0 \;\; \forall\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3$$

d'où : $K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) > 0$ et $\mu > 0$.

D'autre part $\begin{cases} (3\lambda + 2\mu) > 0 \\ \mu > 0 \end{cases} \to (\lambda + \mu) > 0$ et donc $E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} > 0$.

De même pour le coefficient de Poisson ν :

On a $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} > 0 \rightarrow -1 < \nu$ et $3K = \dfrac{E}{(1-2\nu)} > 0 \rightarrow \nu < 1/2$ d'où $-1 < \nu < 1/2$.

- Dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope évoluant à partir de son état naturel, on a les directions principales des contraintes qui coïncident avec celles des déformations.

Découplage de la loi *E. L. I.* :

En partant de la loi *E. L. I* : $\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\,\mu\, \varepsilon_{ij}$, et en utilisant la décomposition de $\overline{\overline{\varepsilon}}$ en déviateur et partie sphérique $\left(\varepsilon_{ij} = \varepsilon_s\, \delta_{ij} + e_{ij}\right)$, on obtient :

$$\sigma_{ij} = (3\lambda + 2\mu)\, \varepsilon_s\, \delta_{ij} + 2\,\mu\, e_{ij} = 3K\varepsilon_s\, \delta_{ij} + 2\,\mu\, e_{ij}.$$

Comme $\sigma_{ij} = \sigma_s\, \delta_{ij} + s_{ij}$, on obtient par identification :

$$\boxed{\sigma_s = 3K\, \varepsilon_s} \quad \text{et} \quad \boxed{s_{ij} = 2\,\mu\, e_{ij}}.$$

Donc la loi *E. L. I.* peut être découplée en une loi sur les parties sphériques décrivant les dilatations uniformes et une autre sur les déviateurs décrivant les distorsions.

5. Puissance de déformation - Energie de déformation:

On appelle puissance de déformation d'un champ de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$ dans un champ de vitesses virtuelles $\vec{V}^*$, l'opposée de la puissance virtuelle des efforts intérieurs correspondante à ces deux champs.

$$\boxed{\mathcal{P}^*_{\text{déf}} = -\mathcal{P}^*_{\text{int}} = \int_D \sigma_{ij}\, D^*_{ij}\, dv}$$

La quantité $p^*_{\text{déf}} = \sigma_{ij} D^*_{ij} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}^*$ représente la puissance virtuelle de déformation par unité de volume.

Considérons un état de déformation infinitésimale, atteint à l'instant t_1 à partir de l'état naturel (non contraint) qui existait à l'instant t_0, et défini par son champ de déplacement $\vec{u}(x,t)$ pour $t_0 \le t \le t_1$.

Le champ de vitesse réel est $\vec{V} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ et le champ du tenseur taux de déformation est : $\overline{\overline{D}} = \dfrac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{\varepsilon}}$.

La puissance de déformation correspondante est : $p_{\text{déf}} = \overline{\overline{\sigma}} : \dfrac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{\varepsilon}}$.

En utilisant la loi de comportement *E. L.*, on montre que $p_{déf} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}})$.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}((\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}) : \overline{\overline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}) = \frac{1}{2}(R_{ijkl}\, \dot{\varepsilon}_{lk}\, \varepsilon_{ji} + R_{ijkl}\, \varepsilon_{lk}\, \dot{\varepsilon}_{ji})$$

$$= \frac{1}{2}(R_{klij}\, \varepsilon_{ji}\, \dot{\varepsilon}_{lk} + R_{ijkl}\, \varepsilon_{lk}\, \dot{\varepsilon}_{ji}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}) = \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} = \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} = p_{déf}$$

#

L'énergie de déformation élastique par unité de volume est définie comme étant le travail de déformation entre les instants t_0 et t :

$$w_{déf} = \int_{t_0}^{t} (p_{\text{déf}})\, dt = \frac{1}{2}\left[\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}\right]_{t_0}^{t} \quad \text{d'où} \quad \boxed{w_{déf} = \frac{1}{2}\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}}.$$

On peut aussi montrer que : $\boxed{\sigma_{ij} = \dfrac{\partial w_{déf}}{\partial \varepsilon_{ij}}}$.

$$\frac{\partial w_{déf}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}((\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}) : \overline{\overline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}(R_{mnkl}\, \varepsilon_{lk}\varepsilon_{nm}) = \frac{1}{2}(R_{mnji}\, \varepsilon_{nm} + R_{jikl}\, \varepsilon_{lk})$$

$$=\frac{1}{2}(R_{jimn}\,\varepsilon_{nm}+R_{jikl}\,\varepsilon_{lk})=R_{jikl}\,\varepsilon_{lk}=R_{ijkl}\,\varepsilon_{lk}=\sigma_{ij}$$ #

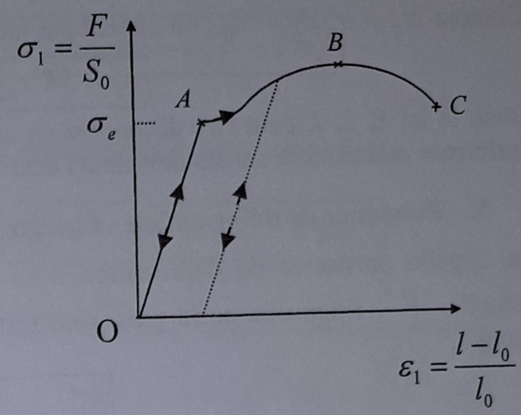
Pour un matériau élastique linéaire isotrope, l'énergie de déformation élastique par unité de volume est donnée par :

$$w_{déf}=\frac{1}{2}\left(\lambda\,\varepsilon_{kk}\,\varepsilon_{ll}+2\mu\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)=\frac{1}{2}\left(\lambda.trace(\overline{\overline{\varepsilon}})^2+2\mu.trace(\overline{\overline{\varepsilon}}^2)\right)$$

ou par : $$w_{déf}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\sigma_{ij}\,\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\sigma_{ll}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\nu}{E}\right).trace(\overline{\overline{\sigma}}^2)-\frac{\nu}{E}.trace(\overline{\overline{\sigma}})^2\right)$$

6. Critères de limite élastique pour les matériaux isotropes:

Si on examine la courbe de traction d'un acier doux, on peut distinguer trois régions remarquables OA, AB, BC:



- OA : correspondant à un comportement élastique linéaire et réversible.
- AB : correspondant à un comportement plastique irréversible. Si on fait une décharge, on constate la présence d'une déformation plastique résiduelle. Si on recharge à nouveau, on constate une augmentation de la limite élastique. C'est le phénomène d'écrouissage.
- B : correspondant à l'apparition de la striction.
- C : correspondant à la rupture de l'éprouvette.

La loi de comportement *E. L. I.* n'est valable qu'en petites déformations et uniquement dans la région OA, c'est-à-dire tant que l'on ne dépasse pas le seuil de limite élastique.
Donc après résolution d'un problème d'élasticité, on doit justifier l'utilisation du modèle *E. L. I.* en vérifiant, d'une part que les déformations sont petites, et d'autre part que le seuil de limite élastique n'est pas dépassé.

Dans le cas unidimensionnel, on doit vérifier que $|\sigma_1|<\sigma_e$ où σ_e représente la limite élastique en traction simple.

Dans le cas tridimensionnel on doit vérifier un critère de limite d'élasticité de la forme $f(\overline{\overline{\sigma}})<0$.

Dans le cas d'un matériau isotrope la fonction $f(\overline{\overline{\sigma}})$ est une fonction isotrope c'est-à-dire pour toute transformation orthogonale $\overline{\overline{Q}}$, on a $f(\overline{\overline{Q}}.\overline{\overline{\sigma}}.\overline{\overline{Q}}^T)=f(\overline{\overline{\sigma}})$. Cela signifie que pour un chargement $\overline{\overline{\sigma}}$ donné par rapport à une base fixée non liée à l'échantillon, la fonction critère prend la même valeur quelque soit l'orientation de l'échantillon.

D'après le théorème de représentation, toute fonction scalaire isotrope $f(\overline{\overline{\sigma}})$ s'exprime de façon équivalente :

- soit comme une fonction symétrique des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3,
- soit comme une fonction des invariants du tenseur des contraintes : $I_1(\overline{\overline{\sigma}}),I_2(\overline{\overline{\sigma}}),I_3(\overline{\overline{\sigma}})$,
-soit comme une fonction de $I_1(\overline{\overline{\sigma}}),J_2(\overline{\overline{\sigma}}),J_3(\overline{\overline{\sigma}})$ (I_1 caractérise la partie sphérique de $\overline{\overline{\sigma}}$, J_2,J_3 sont les invariants du déviateur des contraintes $\overline{\overline{s}}$).La connaissance de $I_1(\overline{\overline{\sigma}})$, $J_2(\overline{\overline{\sigma}})$ et $J_3(\overline{\overline{\sigma}})$ permet de calculer $I_2(\overline{\overline{\sigma}})$ et $I_3(\overline{\overline{\sigma}})$ par : $I_2=J_2+\frac{1}{6}I_1^2$ et $I_3=J_3+\frac{2}{3}I_1J_2+\frac{1}{27}I_1^3$.

a) Critère de Von Mises : [*Richard Von Mises 1913*]

Ce critère suppose que la fonction f ne dépend que de $J_2(\overline{\overline{\sigma}})$:

$$\boxed{f(\overline{\overline{\sigma}})=f(J_2)=\sqrt{J_2}-k=\sqrt{\tfrac{1}{2}s_{ij}s_{ij}}-k}$$

où k est une constante positive caractéristique du matériau, qui a les dimensions d'une contrainte.

Soit en utilisant les contraintes principales :

$$\boxed{f(\overline{\overline{\sigma}}) = \left[\frac{1}{6}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} - k}$$

(Fonction symétrique des contraintes principales)

En traction simple : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, On obtient $f(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} - k < 0 \Rightarrow \sigma_1 < \sqrt{3}k$.

Par comparaison avec $|\sigma_1| < \sigma_e$, on obtient la limite élastique en traction simple : $\boxed{\sigma_e = \sqrt{3}k}$.

Si on se base sur la limite élastique en traction simple, le **critère de Von Mises** s'écrit dans le cas général:

$$\boxed{\sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}} < \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 < 2\sigma_e^{\ 2}}$$

En utilisant les composantes du tenseur des contraintes dans une base quelconque, on obtient :

$$\boxed{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\sigma_{12}^{\ 2}+6\sigma_{23}^{\ 2}+6\sigma_{13}^{\ 2} < 2\sigma_e^{\ 2}}$$

En définissant une **contrainte équivalente de Von Mises**, le critère devient :

$$\boxed{\sigma_{eq.V.M.} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\sigma_{12}^{\ 2}+6\sigma_{23}^{\ 2}+6\sigma_{13}^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}} < \sigma_e}.$$

La contrainte équivalente de Von Mises correspond à la contrainte de traction simple qui donne la même valeur à la fonction critère $f(\overline{\overline{\sigma}})$ que l'état de contrainte complexe considéré.

En cisaillement simple : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{s}}$, $\qquad f(\overline{\overline{\sigma}}) = \sqrt{\tau^2} - k < 0 \Rightarrow \sqrt{\tau^2} < k$

On obtient la limite élastique en cisaillement simple : $\boxed{\tau_e = k}$

Remarques :

- Le critère de Von Mises exprime que la contrainte tangentielle octaédrique τ^{Oct}, ne doit pas dépasser un certain seuil τ_{lim} :

$$\boxed{\left(\tau^{Oct}\right)^2 = \frac{2}{3}J_2 < (\tau_{lim})^2} \xrightarrow{\text{traction simple}} \boxed{(\tau_{lim})^2 = \frac{2}{9}\sigma_e^{\ 2}}$$

- En introduisant l'énergie de déformation élastique par unité de volume :

$$w_{déf} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \underbrace{\frac{1}{18K}\sigma_{kk}\sigma_{ll}}_{w\ dilatation} + \underbrace{\frac{1}{4\mu}s_{ij}s_{ij}}_{w\ distorsion}.$$

Le critère de Von Mises exprime que l'énergie de distorsion ne doit pas dépasser un certain seuil.

b) Critère de Tresca ou critère de contrainte tangentielle maximale: [*Henri Tresca 1864*]

(Critère du cisaillement maximum)

Ce critère spécifie que la limite élastique du matériau est atteinte lorsque la contrainte tangentielle maximale atteint une valeur limite. Pour ce critère la fonction f est de la forme :

$$f(\overline{\overline{\sigma}}) = 2\left(\operatorname*{Sup}_{\|\vec{n}\|=1}\left\|\vec{T}_t(\vec{n})\right\|\right) - \sigma_0$$

où σ_0 est une constante caractéristique du matériau, qui a les dimensions d'une contrainte.

D'après la représentation de Mohr, la contrainte tangentielle maximale est égale à la moitié de la différence entre la plus grande et la plus petite des contraintes principales :

$$\underset{\|\vec{n}\|=1}{\mathrm{Sup}}\left\|\vec{T}_t(\vec{n})\right\| = \frac{1}{2}\underset{1\le i,j\le 3;\ i\neq j}{\mathrm{Sup}}\left(\left|\sigma_i-\sigma_j\right|\right).$$

D'où la fonction critère : $f(\overline{\overline{\sigma}}) = \underset{1\le i,j\le 3;\ i\neq j}{\mathrm{Sup}}\left(\left|\sigma_i-\sigma_j\right|\right)-\sigma_0$.

(Fonction symétrique des contraintes principales)

En considérant **l'état de traction simple** on obtient la limite élastique en traction simple :

$$\boxed{\sigma_e=\sigma_0}.$$

Si on se base sur la limite élastique en traction simple, **le critère de Tresca** s'écrit dans le cas général:

$$\boxed{\underset{1\le i,j\le 3;\ i\neq j}{\mathrm{Sup}}\left(\left|\sigma_i-\sigma_j\right|\right)<\sigma_e}.$$

Soit en introduisant la **contrainte équivalente de Tresca :**

$$\boxed{\sigma_{eq.Tresca}=\underset{1\le i,j\le 3;\ i\neq j}{\mathrm{Sup}}\left(\left|\sigma_i-\sigma_j\right|\right)<\sigma_e}.$$

Dans le cas où $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\sigma_3$, on obtient : $\boxed{\sigma_{eq.Tresca}=\sigma_1-\sigma_3<\sigma_e}$.

On voit que $\sigma_{eq.Tresca}$ est indépendante de la contrainte principale intermédiaire σ_2.

En considérant **l'état de cisaillement simple** On obtient la limite élastique en cisaillement simple :

$$\boxed{\tau_e=\frac{\sigma_0}{2}}.$$

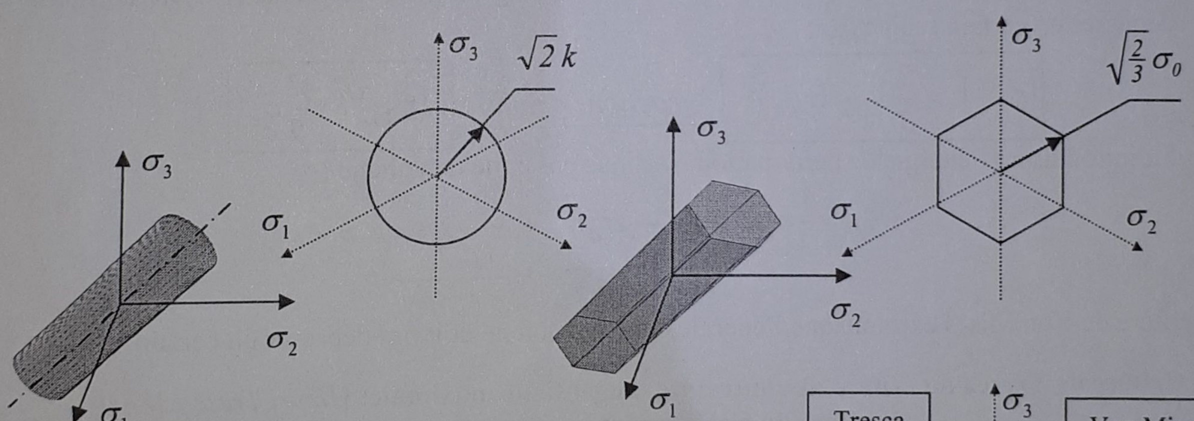
c) Commentaires:

- Les deux critères s'appliquent aux métaux, ils conduisent à des résultats légèrement différents. En particulier, si on considère le rapport entre la limite élastique en traction simple et la limite élastique en cisaillement simple, on obtient la valeur $\sqrt{3}$ pour le critère de Von Mises et la valeur 2 pour le critère de Tresca.
- Les deux critères ne dépendent que du déviateur des contraintes :

$$f(\overline{\overline{\sigma}})=f(\overline{\overline{\sigma}}-p\overline{\overline{I}}),\ \forall p\in IR \iff f(\overline{\overline{\sigma}})=f(\overline{\overline{s}})$$

Pas de limite élastique en compression hydrostatique.

- Dans l'espace des contraintes principales, la surface seuil est un cylindre à base circulaire pour le critère de Von Mises et à base hexagonale pour celui de Tresca.



- Si on se base sur la limite élastique en traction simple, les cylindres de Von Mises et de Tresca auront le même rayon : $\sqrt{2}\,k=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_e$.