Chapitre 5 Etude du tenseur des contraintes de Cauchy

1. Tenseurs des contraintes – Vecteur contrainte:

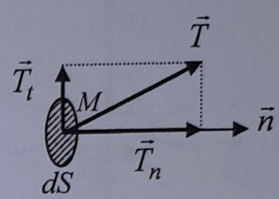
L'utilisation du postulat et du théorème de Cauchy dans la schématisation des efforts s'exerçant sur un domaine matériel a permis de définir en chaque point M du domaine et à chaque instant t, un tenseur symétrique $\overline{\overline{\sigma}}(M,t)$ appelé tenseur des contraintes de Cauchy. Ce tenseur caractérise les efforts intérieurs. Il associe à chaque facette de normale $\vec{n}$, entourant le point M, le vecteur densité surfacique de forces $\vec{T}(M,t,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{n}$ appelé vecteur contrainte.

Le tenseur des contraintes de Cauchy étant symétrique, il admet trois valeurs propres réelles σ_1, σ_2, σ_3 appelées contraintes principales. Les trois directions orthogonales associées aux vecteurs propres de ce tenseur sont appelées directions principales des contraintes.

2. Contrainte normale – Contrainte tangentielle:

Le vecteur contrainte associé à une facette de normale $\vec{n}$ peut être décomposé en composantes normale et tangentielle :

$\boxed{\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t}$ avec $\boxed{\vec{T}_n = T_n \vec{n}}$, $\boxed{T_n = \vec{T}.\vec{n}}$ et $\boxed{\vec{T}_t = \vec{n} \wedge \vec{T} \wedge \vec{n} = \vec{T} - T_n \vec{n}}$



T_n est la contrainte normale, d'après la convention de la M. M. C., elle a un effet de traction si elle est positive et un effet de compression si elle est négative.

T_t est la contrainte tangentielle (appelée aussi cission), c'est une contrainte de cisaillement.

Si $\vec{n}$ est une direction principale des contraintes alors le vecteur contrainte est porté par $\vec{n}$ et la contrainte normale est une contrainte principale (la contrainte tangentielle est nulle).

3. Réciprocité des contraintes :

Puisque le tenseur des contraintes est symétrique, on a au point M et à l'instant t, pour deux directions quelconques définies par $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$: $\vec{n}_1.\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}_2 = \vec{n}_2.\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}_1$ soit $\boxed{\vec{T}(M,t,\vec{n}_2).\vec{n}_1 = \vec{T}(M,t,\vec{n}_1).\vec{n}_2}$.

On peut donc énoncer la **propriété** suivante, dite "**de réciprocité des contraintes**" :

Propriété : La projection sur $\vec{n}_1$ du vecteur contrainte pour la direction $\vec{n}_2$ est égale à la projection sur $\vec{n}_2$ du vecteur contrainte pour la direction $\vec{n}_1$.

Conséquence : pour deux directions orthogonales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, la contrainte tangentielle sur la facette de normale $\vec{n}_1$ a une composante selon $\vec{n}_2$ égale à la composante selon $\vec{n}_1$ de la contrainte tangentielle sur la facette de normale $\vec{n}_2$.

4. Interprétation des composantes du tenseur des contraintes dans une B. O. N:

Soit $\mathcal{B}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base orthonormée dans laquelle le tenseur des contraintes de Cauchy (en un point M et à l'instant t) s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

qui peut aussi s'écrire en utilisant la matrice associée à $\overline{\overline{\sigma}}$ dans $\mathcal{B}$: $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Calculons le vecteur contrainte pour une facette de normale $\vec{e}_j$:

$$\vec{T}(M,t,\vec{e}_j) = \overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{e}_j = \sigma_{ij}\, \vec{e}_i$$

σ_{ij} $\Rightarrow$ direction $\vec{e}_i$ exercé sur une facette de normal $\vec{e}_j$

La composante σ_{ij} de $\overline{\overline{\sigma}}$ relative à une base O. N. $\mathcal{B}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ représente donc la composante selon la direction $\vec{e}_i$ du vecteur contrainte exercé sur une facette de normale $\vec{e}_j$.

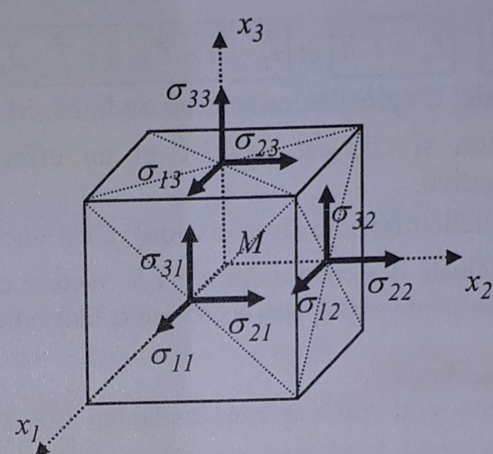
On peut en particulier interpréter la composante σ_{11} comme la contrainte normale sur une facette de normale $\vec{e}_1$. En effet on peut écrire : $\sigma_{11} = \vec{e}_1.\overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{e}_1 = \vec{e}_1.\vec{T}(M,t,\vec{e}_1)$.

De même la composante σ_{21} peut être interprétée comme la composante dans la direction $\vec{e}_2$ de la contrainte tangentielle sur une facette de normale $\vec{e}_1$: $\sigma_{21} = \vec{e}_2.\overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{e}_1 = \vec{e}_2.\vec{T}(M,t,\vec{e}_1)$

La contrainte tangentielle totale sur une facette de normale $\vec{e}_1$ s'obtient par :

$$\vec{T}_t(M,t,\vec{e}_1) = \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3$$

On peut illustrer l'interprétation des composantes du tenseur des contraintes par la représentation suivante donnant les densités surfaciques de forces qui s'exercent sur les faces d'un cube élémentaire centré sur le point M.

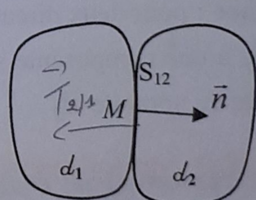


5. Condition aux limites et d'interface :

Soit S^d une portion de la frontière $\partial\mathcal{D}$ sur laquelle la densité surfacique de forces appliquées, est donnée. En désignant $\vec{T}^d$ cette densité, la condition aux limites sur les contraintes s'écrit :

$$\boxed{\vec{T}(M,t,\vec{n}) = \vec{T}^d(M,t) \quad \forall M \in S^d} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{n} = \vec{T}^d(M,t) \quad \forall M \in S^d}$$

Considérons deux domaine d_1 et d_2 ayant une partie de frontière commune S_{12}. Soit M un point de S_{12} et $\vec{n}$, la normale à S_{12} en ce point, dirigée vers l'extérieur de d_1.



On désigne par $\vec{T}_{2/1}$ la densité surfacique de forces exercées par d_2 sur d_1 en M et par $\vec{T}_{1/2}$ celle des forces exercées par d_1 sur d_2 au même point.

Soient $\overline{\overline{\sigma}}_1$ et $\overline{\overline{\sigma}}_2$ les champs de contraintes qui se développent respectivement dans d_1 et d_2.

Les vecteurs $\vec{T}_{2/1}$ et $\vec{T}_{1/2}$ sont tels que :

$$\vec{T}_{2/1} = \vec{T}_1(M,t,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}_1(M,t).\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{T}_{1/2} = \vec{T}_2(M,t,-\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}_2(M,t).(-\vec{n})$$

En tenant compte de la relation entre $\vec{T}_{2/1}$ et $\vec{T}_{1/2}$: $\quad \vec{T}_{2/1} = -\vec{T}_{1/2}$

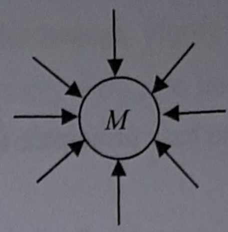
on obtient : $\quad \boxed{\overline{\overline{\sigma}}_1(M,t).\vec{n} = \overline{\overline{\sigma}}_2(M,t).\vec{n}}$

Cette condition est la condition d'interface. Elle exprime la continuité du vecteur contrainte $\left(\vec{T}_1(M,t,\vec{n}) = \vec{T}_2(M,t,\vec{n})\right)$ et traduit le principe de l'action et de la réaction.

6. Etats de contraintes particuliers:

Les états de contraintes qui vont êtres définis dans la suite sont relatifs à un point M et un instant t.

a) Etat de tension ou de compression hydrostatique (ou uniforme) :



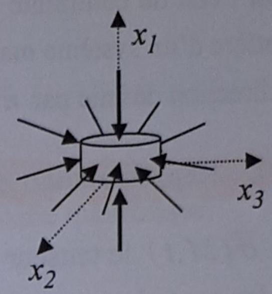
On dit que le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ définit un état de tension ou de compression hydrostatique si $\overline{\overline{\sigma}}$ est un tenseur sphérique : $\overline{\overline{\sigma}} = \sigma \overline{\overline{I}}$.

Quelque soit la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on a :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma\left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right), \ \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Dans ce cas les trois contraintes principales sont identiques et toutes les directions sont principales. On obtient un état de tension si $\sigma > 0$ et un état de compression lorsque $\sigma < 0$.
C'est l'état de contrainte que l'on obtient dans un fluide au repos ($\sigma = -p$).

b) Etat de contrainte triaxial de révolution:

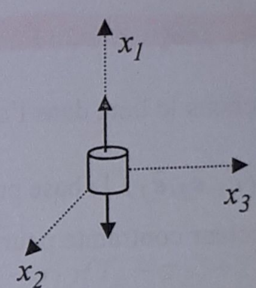


On dit que $\overline{\overline{\sigma}}$ définit un état de contrainte triaxial de révolution, si deux contraintes principales sont égales et non nulles.
Si on suppose que $\sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$, on a dans une base principale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_2\left(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right), \qquad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Toute direction du plan (x_2, x_3) est direction principale associée à $\sigma_2 = \sigma_3$.
C'est l'état de contrainte que l'on rencontre dans les sols en profondeur.

c) Etat de traction ou de compression simple (ou uniaxiale) :

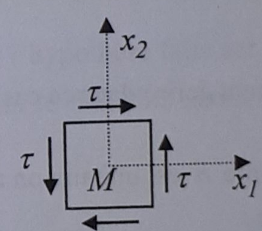


On dit que $\overline{\overline{\sigma}}$ définit un état de traction ou de compression simple dans la direction $\vec{e}_1$ si $\vec{e}_1$ définit une direction principale de $\overline{\overline{\sigma}}$ et si la contrainte principale correspondante est la seule qui soit non nulle.
Dans une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée, $\overline{\overline{\sigma}}$ s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \qquad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

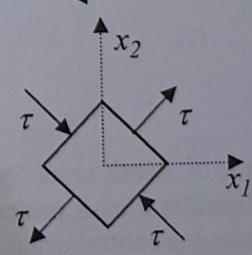
C'est l'état de contrainte que l'on obtient dans un essai de traction.

d) Etat de cisaillement (ou cission) simple:



On dit que $\overline{\overline{\sigma}}$ définit un état de cisaillement simple dans deux directions orthogonales $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ si $\overline{\overline{\sigma}}$ s'écrit dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \tau\left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1\right), \quad . \overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- Les contraintes principales sont :
  $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, $\sigma_3 = 0$
- Les directions principales des contraintes sont :
  les bissectrices des axes x_1, x_2 et l'axe x_3.

Proposition : une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{\overline{\sigma}}$ définisse un état de cisaillement simple est que l'une des contraintes principales soit nulle et les deux autres opposées.

e) Etat de contraintes planes:

On dit que $\overline{\overline{\sigma}}$ définit un état de contraintes planes si l'une des contraintes principales est nulle.

Si on suppose que $\sigma_3 = 0$, on a alors un état de contraintes planes dans un plan perpendiculaire au vecteur propre $\vec{p}_3$ associé à la valeur propre σ_3.

Dans une base principale $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ la matrice de $\overline{\overline{\sigma}}$ s'écrit : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{p}_3)$ non nécessairement principale la matrice de $\overline{\overline{\sigma}}$ s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est l'état de contrainte que l'on rencontre en un point appartenant à une partie libre d'efforts de la frontière d'un système matériel. Si $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure en ce point, on a $\vec{T}(\vec{n}) = \vec{0}$.
La direction définie par $\vec{n}$ est donc une direction principale associée à la contrainte principale $\sigma_3 = 0$.

7. Représentation géométrique des contraintes:

Soit $\overline{\overline{\sigma}}(M,t)$ le tenseur des contraintes en un point M et à l'instant t. On désigne par σ_1, σ_2, σ_3 les contraintes principales en ce point et à cet instant. Comme la numérotation est arbitraire, on peut supposer que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

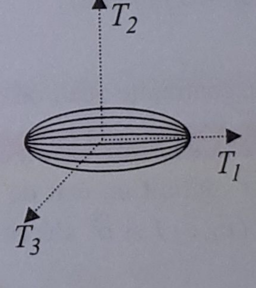
a) Ellipsoïde de Lamé:

Cherchons le lieu, dans l'espace, de l'extrémité du vecteur contrainte pour différentes directions $\vec{n}$.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base principale des contraintes et $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ un vecteur unitaire quelconque.

Le vecteur contrainte pour une facette de normale $\vec{n}$ s'écrit :

$$\vec{T}(M,t,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{n} = T_i \vec{e}_i \text{ avec } \begin{cases} T_1 = \sigma_1 n_1 \\ T_2 = \sigma_2 n_2 \\ T_3 = \sigma_3 n_3 \end{cases}$$



On peut écrire dans ce cas : $n_1 = \frac{T_1}{\sigma_1}$, $n_2 = \frac{T_2}{\sigma_2}$, $n_3 = \frac{T_3}{\sigma_3}$

Comme $\vec{n}$ est unitaire on a : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$,

D'ou :

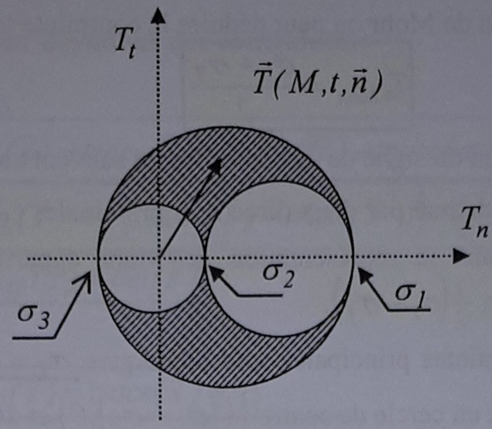
$$\boxed{\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1}$$

Lorsque $\vec{n}$ décrit toute les orientations de l'espace, le lieu de l'extrémité du vecteur contrainte décrit un ellipsoïde d'axes principaux les directions principales des contraintes et de demi -axes les valeurs absolues des contraintes principales. Cet ellipsoïde est l'ellipsoïde de Lamé.

b) Cercles de Mohr:

On décompose le vecteur contrainte pour une facette de normale $\vec{n}$ en une composante normale et une tangentielle : $\boxed{\vec{T} = T_n \vec{n} + T_t \vec{t}}$ (on peut avoir deux orientations possibles pour $\vec{t}$).

La représentation de Mohr est une représentation du vecteur contrainte dans le plan (T_n, T_t) pour différentes directions $\vec{n}$. Dans le cas où σ_1, σ_2 et σ_3 sont distinctes ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), le lieux des points (T_n, T_t) est un domaine compris entre trois cercles appelés cercles de Mohr.



Preuve :

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base principale des contraintes et $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ une normale unitaire quelconque.

Le vecteur contrainte pour une facette de normale $\vec{n}$ s'écrit :

$$\vec{T}(M,t,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{n} = T_i \vec{e}_i = \sigma_1 n_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 n_3 \vec{e}_3 = T_n \vec{n} + T_t \vec{t}$$

et on a le système linéaire en n_1^2, n_2^2, n_3^2 suivant :

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = T_n & \text{: contrainte normale} \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = T_n^{\ 2} + T_t^{\ 2} & \text{: norme du vecteur contrainte} \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 & \text{: } \vec{n} \text{ unitaire} \end{cases}$$

La résolution de ce système dans le cas où σ_1, σ_2 et σ_3 sont distinctes, donne :

$$n_1^2 = \frac{(T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) + T_t^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)},\ n_2^2 = \frac{(T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) + T_t^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)},\ n_3^2 = \frac{(T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) + T_t^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

En écrivant la positivité des n_i^2 ($n_i^2 \geq 0$ pour $i=1,2,3$), et en tenant compte de l'hypothèse faite sur les contraintes principales ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), on obtient trois inéquations définissant le domaine décrit par les points (T_n, T_t):

$$\begin{cases} (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) + T_t^2 \geq 0 \\ (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) + T_t^2 \leq 0 \\ (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) + T_t^2 \geq 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} \left(T_n - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + T_t^2 \geq \left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 & (1) \\ \left(T_n - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + T_t^2 \leq \left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 & (2) \\ \left(T_n - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + T_t^2 \geq \left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 & (3) \end{cases}$$

Les inéquations (1), (2) et (3) peuvent être interprétées comme suit :

(1): les points (T_n, T_t) sont à l'extérieur du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3), 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$

(2): les points (T_n, T_t) sont à l'intérieur du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3), 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$

(3): les points (T_n, T_t) sont à l'extérieur du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2), 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$

#

Remarques :

- A partir de la représentation de Mohr on peut déduire la contrainte tangentielle maximale :

$$\boxed{T_{t\,Max} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}$$

- A cause de l'indétermination du signe de T_t, on se limite souvent au demi plan $(T_n, |T_t|)$.
- Si $\vec{n}$ appartient au plan constitué par deux directions principales $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ avec $\sigma_i > \sigma_j$ alors le point correspondant dans la représentation de Mohr appartient au cercle de centre $\left(\frac{1}{2}(\sigma_i+\sigma_j), 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_i-\sigma_j)$.
- Dans le cas où deux contraintes principales sont identiques $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ par exemple, le lieux des points (T_n, T_t) est un cercle de centre $\left(\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3), 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$.
- Dans le cas où les trois contraintes principales sont identiques $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ les trois cercles de Mohr se réduisent au point de coordonnées $(\sigma_1, 0)$.

8. Décomposition du tenseur des contraintes en partie sphérique et déviateur:

Le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ peut être décomposé en la somme d'un tenseur, dont les trois valeurs propres sont identiques, dit tenseur sphérique et d'un tenseur à trace nulle appelé déviateur :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \underbrace{\sigma_s.\overline{\overline{I}}}_{partie\ sphérique} + \underbrace{\overline{\overline{s}}}_{déviateur}}$$

avec $\boxed{\sigma_s = \frac{1}{3}trace(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}$: contrainte principale moyenne.

Et $\boxed{\overline{\overline{s}} = \overline{\overline{\sigma}} - \sigma_s.\overline{\overline{I}}}$: tenseur déviateur des contraintes.

Remarque : Le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ et son déviateur $\overline{\overline{s}}$ ont les mêmes directions principales. En effet si $\vec{e}_1$ est une direction principale pour $\overline{\overline{\sigma}}$ (associé à la valeur propre σ_1), on a : $\overline{\overline{s}}.\vec{e}_1 = \overline{\overline{\sigma}}.\vec{e}_1 - \sigma_s\overline{\overline{I}}.\vec{e}_1 = (\sigma_1-\sigma_s)\vec{e}_1$. Donc $\vec{e}_1$ est aussi vecteur propre de $\overline{\overline{s}}$ (associé à la valeur propre $(\sigma_1-\sigma_s)$).

9. Invariants du tenseur des contraintes de Cauchy:

Les invariants principaux du tenseur des contraintes de Cauchy sont :

- $\boxed{I_{\mathrm{I}}(\overline{\overline{\sigma}}) = trace(\overline{\overline{\sigma}}) = \sigma_{ii}}$
- $\boxed{I_{\mathrm{II}}(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\left(trace^2(\overline{\overline{\sigma}}) - trace(\overline{\overline{\sigma}}^2)\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)}$
- $\boxed{I_{\mathrm{III}}(\overline{\overline{\sigma}}) = dét(\overline{\overline{\sigma}})}$

Ces invariants sont les coefficients du polynôme caractéristique :
$\boxed{dét(\overline{\overline{\sigma}} - \lambda\overline{\overline{I}}) = 0}$ qui se met sous la forme : $\boxed{-\lambda^3 + I_{\mathrm{I}}(\overline{\overline{\sigma}}).\lambda^2 + I_{\mathrm{II}}(\overline{\overline{\sigma}}).\lambda + I_{\mathrm{III}}(\overline{\overline{\sigma}}) = 0}$.

Il est courant en mécanique d'utiliser les trois invariants indépendants suivants :

- $\boxed{I_1(\bar{\bar{\sigma}}) = I_{\mathrm{I}}(\bar{\bar{\sigma}}) = trace(\bar{\bar{\sigma}})}$
- $\boxed{I_2(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{2} trace(\bar{\bar{\sigma}}^2)}$
- $\boxed{I_3(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{3} trace(\bar{\bar{\sigma}}^3)}$

10. Invariants du tenseur déviateur des contraintes:

➢ Invariants principaux :

- $\boxed{J_{\mathrm{I}}(\bar{\bar{\sigma}}) = I_{\mathrm{I}}(\bar{\bar{s}}) = trace(\bar{\bar{s}}) = trace(\bar{\bar{\sigma}}) - trace(\sigma_s \bar{\bar{I}}) = 0}$
- $\boxed{J_{\mathrm{II}}(\bar{\bar{\sigma}}) = I_{\mathrm{II}}(\bar{\bar{s}}) = \frac{1}{2}\left(trace^2(\bar{\bar{s}}) - trace(\bar{\bar{s}}^2)\right) = \frac{1}{2}\left(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ij}\right) = -\frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}}$
- $\boxed{J_{\mathrm{III}}(\bar{\bar{\sigma}}) = I_{\mathrm{III}}(\bar{\bar{s}}) = d\acute{e}t(\bar{\bar{s}})}$

➢ Autres invariants :

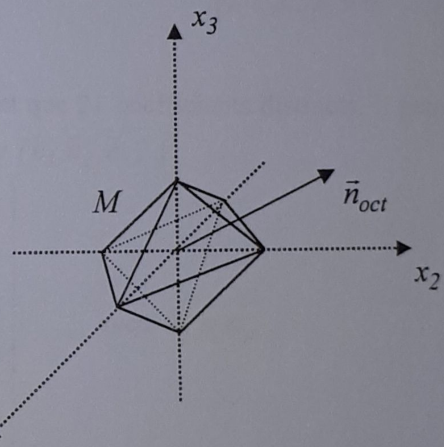
- $\boxed{J_1(\bar{\bar{\sigma}}) = I_1(\bar{\bar{s}}) = trace(\bar{\bar{s}}) = 0}$
- $\boxed{J_2(\bar{\bar{\sigma}}) = I_2(\bar{\bar{s}}) = \frac{1}{2} trace(\bar{\bar{s}}^2) = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}}$
- $\boxed{J_3(\bar{\bar{\sigma}}) = I_3(\bar{\bar{s}}) = \frac{1}{3} trace(\bar{\bar{s}}^3)}$

Remarques: L'invariant $J_2(\bar{\bar{\sigma}})$ peut être exprimé à l'aide des contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 :

$$\boxed{J_2(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{6}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)}$$

11. Contrainte Octaédrique:

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base principale des contraintes en un point M.
On appelle contrainte octaédrique, le vecteur contrainte sur une facette de normale $\vec{n}_{oct}$ faisant un angle égal avec les directions principales des contraintes :



$$\boxed{\vec{n}_{oct} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)}$$

$$\boxed{\vec{T}^{oct} = \vec{T}(M,t,\vec{n}_{oct}) = \bar{\bar{\sigma}}(M,t).\vec{n}_{oct}}.$$

La contrainte normale octaédrique T_n^{oct} est donnée par :

$$\boxed{T_n^{oct} = \vec{n}_{oct}.\vec{T}^{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1(\bar{\bar{\sigma}}) = \sigma_s}.$$

La contrainte tangentielle octaédrique T_t^{oct} (ou τ^{oct}) est donnée par :

$$\boxed{\left(T_t^{oct}\right)^2 = \left\|\vec{T}^{oct}\right\|^2 - \left(T_n^{oct}\right)^2 = \frac{1}{9}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right) = \frac{2}{3} J_2}.$$