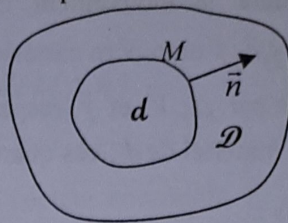
Chapitre 4 Dynamique des milieux continus

1. Description des efforts mécaniques:

Soit à un instant t un système matériel occupant un domaine $\mathscr{D}(t)$ de frontière $\partial\mathscr{D}$ et soit d un domaine matériel inclus dans $\mathscr{D}$, de frontière ∂d. Supposons qu'à l'instant t le sous domaine d soit strictement inclus dans $\mathscr{D}$ c'est-à-dire que la frontière ∂d n'ait pas de partie commune avec $\partial\mathscr{D}$.

Les actions mécaniques qui peuvent être exercées par l'extérieur (constitué du milieu extérieur de $\mathscr{D}$ et du domaine complémentaire de d dans $\mathscr{D}$) sur le sous domaine d sont de deux types :



a) Les actions à distance ou volumiques : (exemple les actions de la pesanteur)

Elles sont exercées par le milieu extérieur de $\mathscr{D}$ et sont caractérisées (en description eulérienne) par une densité massique (ou volumique) de force $\vec{f}_m(\vec{x},t)$ (ou $\vec{f}_v(\vec{x},t)$) telle que la résultante de ces efforts sur un élément de volume s'écrit :

$$\boxed{d\vec{F}_v = \rho\,\vec{f}_m\,dv} \quad \text{ou} \quad \boxed{d\vec{F}_v = \vec{f}_v\,dv}$$

b) Les actions de contact ou surfaciques :

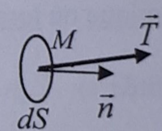
Elles sont exercées par le domaine complémentaire de d dans $\mathscr{D}$ (noté $\bar{d}$) à travers sa frontière ∂d.
Ce sont des actions locales qui interviennent à courte distance et qui sont dues aux interactions des molécules (efforts de cohésion).
Notons que ces actions, extérieures à d, peuvent être qualifiées d'intérieures à $\mathscr{D}$.

<u>**Postulat de Cauchy**</u>

- En tout point M de ∂d, les efforts de contact exercés par $\bar{d}$ sur d sont schématisés par une densité surfacique de force $\vec{T}$.
- Cette densité $\vec{T}$ ne dépend que du point M considéré, du temps t et de la normale extérieure à ∂d en M :

$$\boxed{\vec{T} = \vec{T}(M,t,\vec{n})}$$

$\vec{T}$ est appelé vecteur contrainte au point M à l'instant t pour la direction $\vec{n}$.



La résultante des efforts surfaciques qui s'exercent sur un élément de surface dS (appelé facette) entourant un point M de ∂d est donnée par :

$$\boxed{d\vec{F}_s = \vec{T}(M,t,\vec{n})\,dS}$$

Considérons maintenant le cas d'un domaine matériel d dont la frontière ∂d possède, à l'instant t, une partie commune avec la frontière $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$. Ce cas englobe aussi celui où $d = \mathcal{D}$.
On postule que les efforts extérieurs qui s'exercent sur la partie de frontière commune entre d et $\mathcal{D}$ peuvent être représentés eux aussi par une densité surfacique de forces $\vec{Q}(M,t)$
On peut alors montrer par des arguments de continuité que l'on doit avoir en tout point de la frontière commune entre d et $\mathcal{D}$: $\boxed{\vec{T}(M,t,\vec{n}) = \vec{Q}(M,t)}$.
Cette condition doit être vérifiée quel que soit le sous domaine d ayant une partie de frontière commune avec le domaine $\mathcal{D}$, y compris le cas où $d = \mathcal{D}$, donc elle doit être vérifiée en tous points de la frontière $\partial\mathcal{D}$ c'est <u>**la condition aux limites sur les contraintes**</u>.
Dans la suite de ce cours on utilisera $\vec{T}$ pour représenter les actions surfaciques intérieures ou extérieures à $\mathcal{D}$.
A partir de cette schématisation des efforts extérieurs, on obtient le torseur des efforts extérieurs appliqués sur le domaine d exprimé en un point A :

$$\boxed{\{F_{ext/d}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} = \int_d \rho \vec{f}_m \, dv + \int_{\partial d} \vec{T} \, dS \\ \vec{M}_{ext_A} = \int_d \rho \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_m \right) dv + \int_{\partial d} \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{T} \right) dS \end{Bmatrix}_A}$$

2. Torseur Cinétique et Torseur Dynamique:

On considère le mouvement d'un domaine matériel d par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Soit $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un repère cartésien orthonormé lié à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ la base orthonormée associée. On désigne par ρ, $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$ respectivement, la masse volumique, la vitesse et l'accélération à l'instant t d'un point matériel de d, ces quantités seront exprimées à l'aide des variables d'Euler.

Définitions :

On appelle résultante cinétique ou quantité de mouvement associée à d, à l'instant t, le vecteur :

$$\vec{\mathcal{P}} = \int_d \rho \vec{V} \, dv \; .$$

On appelle moment cinétique ou moment de quantité de mouvement au point A associée à d, à l'instant t, le vecteur :

$$\vec{\sigma}_A = \int_d \rho \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V} \right) dv \; .$$

Le torseur admettant $\vec{\mathcal{P}}$ comme résultante et $\vec{\sigma}_A$ comme moment en un point A s'appelle torseur cinétique ou torseur des quantités de mouvement.

On note :

$$\{\mathcal{C}(d,t)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{P}} \\ \vec{\sigma}_A \end{Bmatrix}_A$$

On appelle résultante dynamique ou quantité d'accélération associée à d, à l'instant t, le vecteur :

$$\vec{\mathcal{A}} = \int_d \rho \vec{\gamma} \, dv \; .$$

On appelle moment dynamique ou moment de quantité d'accélération au point A associée à d, à l'instant t, le vecteur :

$$\vec{\delta}_A = \int_d \rho \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma} \right) dv \; .$$

Le torseur admettant $\vec{\mathcal{A}}$ comme résultante et $\vec{\delta}_A$ comme moment en un point A s'appelle torseur dynamique ou torseur des quantités d'accélération.

On note :

$$\{\mathcal{A}(d,t)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{A}} \\ \vec{\delta}_A \end{Bmatrix}_A$$

Proposition :

Les éléments de réduction, en un point A lié à $\mathcal{R}$, du torseur dynamique sont les dérivées particulaires des éléments de réduction correspondants du torseur cinétique.

On écrira : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\{\mathcal{C}(d,t)\}_A = \{\mathcal{A}(d,t)\}_A}$ Pour tout A lié à $\mathcal{R}$.

Preuve :

Calculons la dérivée particulaire de $\vec{\mathcal{P}}$: $\dfrac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\int_d \rho \vec{V} \, dv = \int_d \rho \dfrac{d\vec{V}}{dt} dv = \int_d \rho \vec{\gamma} \, dv = \vec{\mathcal{A}}$

Calculons la dérivée particulaire de $\vec{\sigma}_A$ en un point A lié au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\int_d \rho \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V} \right) dv = \int_d \rho \left(\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt} \right) dv = \int_d \rho \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma} \right) dv = \vec{\delta}_A$$

Puisque $\dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \vec{V}$ et $\vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ pour tout A lié à $\mathcal{R}$. #

3. Principe Fondamental de la dynamique (P. F. D.):

a) Enoncé du P. F. D. :

Il existe au moins un référentiel, dit galiléen ou absolu, et une chronologie, dite absolue, tels que, à chaque instant et pour tout domaine matériel d inclus dans un système matériel $\mathcal{D}$, le torseur dynamique associé à d est égal au torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur d.

$$\boxed{\{\mathcal{A}(d,t)\}_A = \{F_{ext}/d\}_A}$$

L'inclusion de d dans $\mathcal{D}$ n'est pas à prendre au sens strict. Cet énoncé est donc valable pour $d = \mathcal{D}$.

b) Formulation globale du P. F. D. :

Considérons un domaine matériel d inclus dans un système matériel $\mathcal{D}$. En écrivant les torseurs associés à d au point O origine du repère R, on obtient la forme globale du P. F. D. :

$$\boxed{\begin{cases} \int_d \rho \vec{f}_m \, dv + \int_{\partial d} \vec{T} \, dS = \int_d \rho \vec{\gamma} \, dv \\ \int_d \rho \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_m\right) dv + \int_{\partial d} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}\right) dS = \int_d \rho \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}\right) dv \end{cases}}.$$

On peut aussi écrire le principe fondamental de la dynamique de la façon suivante :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\{\mathcal{C}(d,t)\}_O = \{F_{ext}/d\}_O}$$ (Le point O étant lié au référentiel)

soit $$\boxed{\begin{cases} \frac{d}{dt}\int_d \rho \vec{V} \, dv = \int_d \rho \vec{f}_m \, dv + \int_{\partial d} \vec{T} \, dS \\ \frac{d}{dt}\int_d \rho \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}\right) dv = \int_d \rho \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_m\right) dv + \int_{\partial d} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}\right) dS \end{cases}}.$$

Cette forme est connue sous les noms : théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique ou encore sous les noms : théorèmes des quantités de mouvement et des moments des quantités de mouvement.

Pour un système isolé (qui n'est soumis à aucune action extérieure) le torseur cinétique se conserve. C'est pour cette raison que le P.F.D. est aussi appelé principe de conservation du torseur des quantités de mouvement.

c) Existence du tenseur des contraintes de Cauchy:

Proposition :

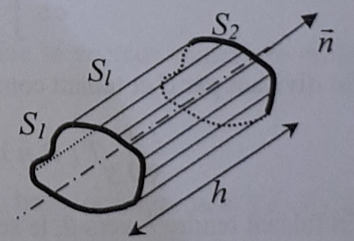
Considérons à un instant t, un point M d'un domaine matériel $\mathcal{D}$. Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, le vecteur contrainte en M pour la direction définie par $-\vec{n}$ est l'opposé du vecteur contrainte en M pour la direction $\vec{n}$.

$$\boxed{\vec{T}(M,t,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,t,\vec{n})}$$

Cette proposition constitue une forme locale du théorème de l'action et de la réaction.

Preuve :

Considérons un domaine cylindrique C de hauteur h de section droite quelconque et d'axe dirigé suivant un vecteur unitaire $\vec{n}$. On désigne par S_1 (de normale $-\vec{n}$) et S_2 (de normale $\vec{n}$) les sections extrêmes du cylindre et par S_l (de normale $\vec{m}$) sa surface latérale.



En appliquant le P.F.D au cylindre, on obtient pour l'équation de la résultante :

$\int_C \rho \vec{f}_m \, dv + \int_{\partial C} \vec{T} \, dS = \int_C \rho \vec{\gamma} \, dv$.

Comme $\partial C = S_l \cup S_2 \cup S_l$, on peut décomposer l'intégrale de surface :

$$\int_{S_1} \vec{T}(M_1,t,-\vec{n})\, dS + \int_{S_2} \vec{T}(M_2,t,\vec{n})\, dS + \int_{S_l} \vec{T}(M_3,t,\vec{m})\, dS = \int_C \rho(\vec{\gamma} - \vec{f}_m)dv$$

Où M_l, M_2 et M_3 sont des points courants respectivement de S_l, S_2 et S_3.

En faisant tendre h vers zéro, le volume et la surface latérale du cylindre s'annulent, on obtient :

$$\int_{S=S_l=S_2} \left(\vec{T}(M,t,-\vec{n}) + \vec{T}(M,t,\vec{n})\right) dS = \vec{0}$$

Comme S est quelconque, on obtient l'égalité : $\vec{T}(M,t,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,t,\vec{n})$. #

Théorème de Cauchy :

En tout point M d'un domaine matériel et à chaque instant t, le vecteur contrainte $\vec{T}$ est linéaire par rapport à $\vec{n}$ (pour M et t fixés, l'application $\vec{n} \rightarrow \vec{T}(M,t,\vec{n})$ est linéaire).

Il existe donc un champ tensoriel du second ordre $\overline{\overline{\sigma}}$, tel que pour tout M et pour tout t on ait:

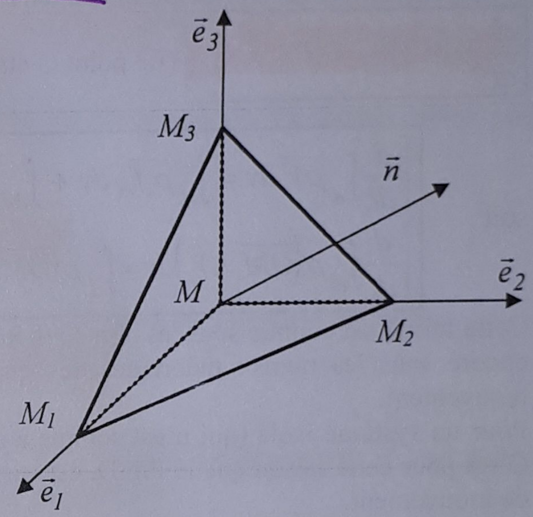
$$\boxed{\vec{T}(M,t,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{n}}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}(M,t)$ est appelé tenseur des contraintes de Cauchy au point M et à l'instant t.

Dém.

Pour montrer la linéarité de l'application : $\vec{n} \rightarrow \vec{T}(M,t,\vec{n})$ et l'existence du tenseur des contraintes de Cauchy, on considère à un instant t dans le système matériel $\mathcal{D}$ et au voisinage d'un point matériel M, un domaine matériel Δ de forme tétraédrique, de sommets M, M_l, M_2, M_3, construit sur les axes d'un repère orthonormé $(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

On désigne par S_i la face du tétraèdre de normale $(-\vec{e}_i)$ et par S de normale $\vec{n}$, la face M_l, M_2, M_3.



On pose $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$

On note V le volume du tétraèdre et h sa hauteur (à partir de M).

On a dans ce cas les relations géométriques suivantes : $V = \dfrac{hS}{3}$ et $S_i = n_i S$ $(i=1, 2, 3)$

Appliquons le théorème de la résultante dynamique au domaine Δ :

$$\int_\Delta \rho \vec{f}_m\, dv + \int_{\partial\Delta} \vec{T}\, dS = \int_\Delta \rho\vec{\gamma}\, dv$$

$$\Leftrightarrow \int_S \vec{T}(P,\vec{n})dS + \sum_{i=1}^{3} \int_{S_i} \vec{T}(P,-\vec{e}_i)dS = \int_\Delta \rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}_m\right)dv\ .$$

En divisant par S et tenant compte des relations géométriques ci-dessus on obtient :

$$\frac{1}{S}\int_S \vec{T}(P,\vec{n})dS + \sum_{i=1}^{3}\frac{n_i}{S_i}\int_{S_i} \vec{T}(P,-\vec{e}_i)dS = \frac{h}{3V}\int_\Delta \rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}_m\right)dv\ .$$

En faisant tendre h vers 0, le second membre tend vers 0 et obtient :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) + \sum_{i=1}^{3} n_i\vec{T}(M,-\vec{e}_i) = \vec{0} \quad \text{soit } \vec{T}(M,\vec{n}) = \sum_{i=1}^{3} n_i\vec{T}(M,\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{3} n_j\vec{T}(M,\vec{e}_j)$$

D'où la linéarité de $\vec{T}$ par rapport à $\vec{n}$.

En posant $\vec{T}(M,\vec{e}_j)=T_i(M,t,\vec{e}_j)\vec{e}_i$, on obtient (avec la convention de l'indice répété):

$$\vec{T}(M,\vec{n})=n_jT_i(M,t,\vec{e}_j)\vec{e}_i=T_i(M,t,\vec{e}_j)n_j\,\vec{e}_i$$

Il existe donc un tenseur du second ordre $\overline{\overline{\sigma}}(M,t)$ défini par ses composantes dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$:

$$\sigma_{ij}(M,t)=T_i(M,t,\vec{e}_j)$$

tel que : $\vec{T}(M,\vec{n})=\overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{n}$

d) Formulation locale du P. F. D. – Equations du mouvement:

En exprimant dans la première relation du P. F. D. le vecteur contrainte $\vec{T}(M,t,\vec{n})$ en fonction de $\overline{\overline{\sigma}}(M,t)$ et $\vec{n}$, on obtient :

$$\int_d \rho\vec{f}_m\,dv+\int_{\partial d}\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}\,dS=\int_d \rho\vec{\gamma}\,dv$$

Soit en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_d \rho\vec{f}_m\,dv+\int_d div\overline{\overline{\sigma}}\,dv=\int_d \rho\vec{\gamma}\,dv \quad\leftrightarrow\quad \int_d\left(\rho\vec{f}_m+div\overline{\overline{\sigma}}-\rho\vec{\gamma}\right)dv=\vec{0}$$

Le domaine d pourrait être quelconque, l'application du théorème de l'intégrale nulle permet d'obtenir <u>**les équations locales du mouvement**</u>:

$$\rho\vec{f}_m+div\overline{\overline{\sigma}}-\rho\vec{\gamma}=\vec{0} \qquad\leftrightarrow\qquad \boxed{div\overline{\overline{\sigma}}+\rho\vec{f}_m=\rho\vec{\gamma}}.$$

En coordonnées cartésiennes orthonormées on obtient les trois équations scalaires suivantes :

$$\boxed{\sigma_{ij,j}+\rho(f_m)_i=\rho\gamma_i} \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

<u>**Equations locales d'équilibre**</u>:

Pour un système matériel en équilibre (cas statique $\vec{V}=\vec{0}$ ou plus généralement $\vec{V}$ constant en chaque point du système), On obtient les équations locales d'équilibre :

$$\boxed{div\overline{\overline{\sigma}}+\rho\vec{f}_m=\vec{0}}$$

Ces équations pourront aussi être appliquées pour un problème d'évolution lorsque les termes d'accélération $\rho\vec{\gamma}$ peuvent être négligées devant les efforts mis en jeu dans le problème. On parlera alors d'**évolution quasi–statique**.

Proposition :

A partir de la forme locale de la deuxième relation du P. F. D., on obtient **la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\overline{\sigma}}$** :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}^T=\overline{\overline{\sigma}}}$$

<u>Preuve</u> :

Considérons la deuxième relation du PFD, dans laquelle on exprime le vecteur contrainte en fonction du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\int_d \rho\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}_m\right)dv+\int_{\partial d}\left(\overrightarrow{OM}\wedge\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}\right)dS=\int_d \rho\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}\right)dv$$

En projetant cette équation vectorielle sur les trois axes de la base orthonormée $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ on obtient :

$$\int_d \rho\varepsilon_{ijk}x_j(f_m)_k\,dv+\int_{\partial d}\underbrace{\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}}_{S_{il}}n_l\,dS=\int_d \rho\varepsilon_{ijk}x_j\gamma_k\,dv \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

soit en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_d \rho \varepsilon_{ijk} x_j (f_m)_k \, dv + \int_d \underbrace{\left(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}\right)_{,l}}_{S_{il,l}} dv = \int_d \rho \varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k \, dv$$

avec le théorème de l'intégrale nulle on peut écrire :

$$\rho \varepsilon_{ijk} x_j (f_m)_k + \left(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}\right)_{,l} = \rho \varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k$$

$$\Leftrightarrow \rho \varepsilon_{ijk} x_j (f_m)_k + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} + \varepsilon_{ijk} x_{j,l} \sigma_{kl} = \rho \varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{ijk} x_j \Big(\underbrace{\sigma_{kl,l} + \rho (f_m)_k - \rho \gamma_k}_{0 \text{ Eq du mouv}} \Big) + \varepsilon_{ijk} x_{j,l} \sigma_{kl} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{ijk} x_{j,l} \sigma_{kl} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (i=1) & \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \\ (i=2) & \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \\ (i=3) & \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$$

4. Théorème des puissances virtuelles:

Soit $\vec{V}^* = \vec{V}^*(\vec{x},t)$ un champ de vitesses virtuelles quelconque défini sur un domaine matériel d.

Enoncé du théorème : La puissance virtuelle des quantités d'accélération d'un domaine d est égale à la somme de la puissance virtuelle des efforts extérieurs et de celle des efforts intérieurs.

$$\boxed{\underbrace{\int_d \rho \vec{\gamma} . \vec{V}^* dv}_{\mathcal{P}_a^*} = \underbrace{\int_d \rho \vec{f}_m . \vec{V}^* dv + \int_{\partial d} \vec{T} . \vec{V}^* dS}_{\mathcal{P}_{ext}^*} + \underbrace{\left(- \int_d \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}^* dv \right)}_{\mathcal{P}_{int}^*}}$$

Cette relation suppose que $\vec{V}^*$ est suffisamment régulier sur le domaine matériel d.

<u>Dém</u> :

Partons des équations locales du mouvement : $div \overline{\overline{\sigma}} + \rho \vec{f}_m = \rho \vec{\gamma}$

Multiplions scalairement des deux côtés par un champ de vitesse virtuelle $\vec{V}^*$:

$$div \overline{\overline{\sigma}} . \vec{V}^* + \rho \vec{f}_m . \vec{V}^* = \rho \vec{\gamma} . \vec{V}^*$$

Intégrons sur un domaine d : $\int_d div \overline{\overline{\sigma}} . \vec{V}^* dv + \int_d \rho \vec{f}_m . \vec{V}^* dv = \int_d \rho \vec{\gamma} . \vec{V}^* dv$

Développons le premier terme :

On a : $div \overline{\overline{\sigma}} . \vec{V}^* = \sigma_{ij,j} V_i^* = \left(\sigma_{ij} V_i^*\right)_{,j} - \sigma_{ij} V_{i,j}^*$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_d div \overline{\overline{\sigma}} . \vec{V}^* dv = \int_d \left(\sigma_{ij} V_i^*\right)_{,j} dv - \int_d \sigma_{ij} V_{i,j}^* dv = \int_{\partial d} \left(\sigma_{ij} V_i^*\right) n_j dS - \int_d \sigma_{ij} V_{i,j}^* dv$$

D'autre part on a : $\left(\sigma_{ij} V_i^*\right) n_j = \sigma_{ij} n_j V_i^* = T_i V_i^* = \vec{T} . \vec{V}^*$

$$\sigma_{ij} V_{i,j}^* = \sigma_{ij} L_{ij}^* = \sigma_{ij} D_{ij}^* + \sigma_{ij} W_{ij}^*$$

$$\sigma_{ij} W_{ij}^* = \tfrac{1}{2} \sigma_{ij} (L_{ij}^* - L_{ji}^*) = \tfrac{1}{2} (\sigma_{ij} L_{ij}^* - \sigma_{ij} L_{ji}^*)$$

$$= \tfrac{1}{2} (\sigma_{ij} L_{ij}^* - \sigma_{ji} L_{ji}^*) \qquad (\overline{\overline{\sigma}} \text{ est symétrique})$$

$$= \tfrac{1}{2} (\sigma_{ij} L_{ij}^* - \sigma_{ij} L_{ij}^*) = 0 \qquad (i,j \text{ indices muets})$$

d'où $\sigma_{ij} V^*_{i,j} = \sigma_{ij} L^*_{ij} = \sigma_{ij} D^*_{ij} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}^*$ et $\int_d div\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}^*\, dv = \int_{\partial d} \vec{T}.\vec{V}^*\, dS - \int_d \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}^* dv$ #

La quantité $\mathcal{P}^*_{int} = -\int_d \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}^* dv$ est appelée puissance virtuelle des efforts intérieurs au domaine $\boldsymbol{d}$ dans le mouvement $\vec{V}^*$ et à l'instant t.

$\mathcal{P}^*_{int}$ est nulle dans tout mouvement rigidifiant le domaine $\boldsymbol{d}$.

On appelle puissance virtuelle de déformation du domaine $\boldsymbol{d}$ dans le mouvement $\vec{V}^*$ et à l'instant t la quantité : $\boxed{\mathcal{P}^*_{def} = -\mathcal{P}^*_{int} = \int_d \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}^* dv}$.

5. Théorème de l'énergie cinétique:

On appelle énergie cinétique d'un domaine $\boldsymbol{d}$ à l'instant t, la quantité : $\boxed{K(d,t) = \frac{1}{2}\int_d \rho \vec{V}^2\, dv}$

En choisissant dans l'expression du théorème des puissances virtuelles comme champ de vitesse virtuelle $\vec{V}^*$ le champ réel $\vec{V}$, on obtient :

$$\mathcal{P}_a = \int_d \rho\vec{\gamma}.\vec{V}dv = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{P}_a = \int_d \rho\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}dv = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{P}_a = \frac{1}{2}\int_d \rho\frac{d\vec{V}^2}{dt}dv = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{P}_a = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\int_d \rho\vec{V}^2\, dv\right)}_{K(d,t)} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{d}{dt}K(d,t) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}}$$

D'où **l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique**

La dérivée particulaire à l'instant t de l'énergie cinétique K associée à un domaine $\boldsymbol{d}$ est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance des efforts intérieurs.

6. Contraintes en description Lagrangienne:

Jusqu'à présent nous nous sommes limités à la définition de la notion de contraintes dans la description Eulérienne et ceci moyennant le tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\overline{\sigma}}$. On envisage dans ce qui suit d'introduire cette notion en description Lagrangienne.

Considérons un domaine matériel $\boldsymbol{d}$ occupant la configuration C_0 à l'instant initial et la configuration C_t à un instant t.

Soit autour d'un point matériel M, un élément de surface représenté par dS_0 de normale $\vec{n}_0$ dans C_0 et par dS de normale $\vec{n}$ dans C_t et soit $\vec{T}(M,t,\vec{n})$ le vecteur contrainte en M à l'instant t pour la direction $\vec{n}$.

La force élémentaire s'exerçant sur dS est égale à : $d\vec{F} = \vec{T}(M,t,\vec{n})dS = \overline{\overline{\sigma}}(M,t).\vec{n}\, dS$

On peut aussi exprimer $d\vec{F}$ à l'aide de dS_0 en utilisant la relation de transport :

$\vec{n}\,dS = J\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\right)^T.\vec{n}_0\,dS_0$, Il vient : $d\vec{F} = J\,\overline{\overline{\sigma}}.\left(\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\right)^T.\vec{n}_0\right)dS_0 = J\left(\overline{\overline{\sigma}}.\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\right)^T\right).\vec{n}_0 dS_0$

Soit en posant $\boxed{\overline{\overline{\Pi}} = J\,\overline{\overline{\sigma}}.\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\right)^T}$ on obtient : $\boxed{d\vec{F} = \overline{\overline{\Pi}}.\vec{n}_0\,dS_0}$.

Le tenseur $\overline{\overline{\Pi}}$ est appelé **tenseur de Boussinesq** ou **premier tenseur de Piola-Kirchhoff**. Ses composantes dans la base $\mathcal{B}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ s'expriment par : $\boxed{\Pi_{ij} = J\,\sigma_{ik}\,\frac{\partial X_j}{\partial x_k}}$. On peut remarquer que $\overline{\overline{\Pi}}$ n'est pas symétrique.

Le tenseur $\overline{\overline{\Pi}}$ permet d'obtenir, dans la configuration actuelle, la force élémentaire s'exerçant sur un élément de surface défini dans la configuration de référence.

On peut définir une force élémentaire fictive $d\vec{F}_0$ telle que : $d\vec{F} = \overline{\overline{F}}.d\vec{F}_0$ ou $d\vec{F}_0 = \overline{\overline{F}}^{-1}.d\vec{F}$.

En utilisant les relations $d\vec{F} = \overline{\overline{\Pi}}.\vec{n}_0\,dS_0$ et $\overline{\overline{\Pi}} = J\,\overline{\overline{\sigma}}.\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\right)^T$ on obtient :

$$d\vec{F}_0 = J\,\overline{\overline{F}}^{-1}.\overline{\overline{\sigma}}.\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\right)^T.\vec{n}_0\,dS_0$$

Soit en posant $\boxed{\overline{\overline{\pi}} = J\,\overline{\overline{F}}^{-1}.\overline{\overline{\sigma}}.\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\right)^T}$, $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \frac{1}{J}\overline{\overline{F}}.\overline{\overline{\pi}}.\overline{\overline{F}}^T}$ on obtient : $\boxed{d\vec{F}_0 = \overline{\overline{\pi}}.\vec{n}_0\,dS_0}$.

Le tenseur $\overline{\overline{\pi}}$ est appelé **second tenseur de Piola-Kirchhoff**. Ses composantes dans la base $\mathcal{B}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ s'expriment par :

$$\boxed{\pi_{ij} = J\,\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\sigma_{kl}\frac{\partial X_j}{\partial x_l}}.$$

On peut vérifier que le tenseur $\overline{\overline{\pi}}$ est symétrique :

$$\pi_{ji} = J\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\sigma_{kl}\frac{\partial X_i}{\partial x_l} = J\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\sigma_{lk}\frac{\partial X_i}{\partial x_l} = J\frac{\partial X_i}{\partial x_l}\sigma_{lk}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = J\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\sigma_{kl}\frac{\partial X_j}{\partial x_l} = \pi_{ij}$$ #

Proposition : La puissance des efforts intérieurs peut se mettre sous la forme purement Lagrangienne suivante : $\boxed{\mathsf{P}_{int} = -\int_{d_0}\overline{\overline{\pi}}(\vec{X},t):\dot{\overline{\overline{E}}}(\vec{X},t)dv_0}$

<u>Preuve</u> :

En utilisant les relations suivantes :

$dv = J\,dv_0$, $\overline{\overline{\sigma}} = \frac{1}{J}\overline{\overline{F}}.\overline{\overline{\pi}}.\overline{\overline{F}}^T$, $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{F}}^{-T}.\dot{\overline{\overline{E}}}.\overline{\overline{F}}^{-1}$, $\overline{\overline{a}}:(\overline{\overline{b}}.\overline{\overline{c}}) = (\overline{\overline{c}}.\overline{\overline{a}}):\overline{\overline{b}} = (\overline{\overline{a}}.\overline{\overline{b}}):\overline{\overline{c}}$,

on obtient $\mathsf{P}_{int} = -\int_{d}\overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{D}}dv = -\int_{d_0}\left(\frac{1}{J}\overline{\overline{F}}.\overline{\overline{\pi}}.\overline{\overline{F}}^T\right):\left(\overline{\overline{F}}^{-T}.\dot{\overline{\overline{E}}}.\overline{\overline{F}}^{-1}\right)J dv_0 = -\int_{d_0}\overline{\overline{\pi}}:\dot{\overline{\overline{E}}}\,dv_0$. #

7. Principe des puissances virtuelles:

Pour établir les équations locales du mouvement nous avons utilisé le principe fondamental de la dynamique. Les efforts sont dans ce cas représentés par des vecteurs.
Il existe une autre voie qui consiste à caractériser des efforts non pas par une quantité vectorielle, mais par une quantité scalaire liée à la puissance développée par ces efforts dans une certaine classe de mouvements. Cette démarche nécessite donc la donnée d'un ensemble (en général un espace vectoriel) d'éléments cinématiques.

a) Mouvement virtuel:

Considérons à l'instant t, un domaine matériel d. Définir un champ de vitesses virtuelles de d à l'instant t, c'est se donner un champ de vecteur $\vec{V}^*$, défini sur d et possédant des conditions de régularité suffisantes.
A chaque champ de vitesses virtuelles on associe un mouvement virtuel et on considère ensuite l'espace vectoriel des mouvements virtuels. Cet espace doit contenir le mouvement réel et les mouvements rigidifiant d.

b) Puissance virtuelle:

Après avoir défini l'espace vectoriel des mouvements virtuels, on caractérise chaque type d'efforts par une forme linéaire continue sur cet espace vectoriel. Cette forme linéaire sera appelée puissance virtuelle des efforts considérés dans le mouvement virtuel. Selon le choix de cette forme, on pourra obtenir une schématisation plus ou moins fine des actions.

Prenons l'exemple du point matériel. Sa vitesse virtuelle à un instant t sera un vecteur quelconque $\vec{V}^*$ de l'espace vectoriel E_3. Or toute forme linéaire Φ sur E_3 peut s'écrire : $\Phi(\vec{V}^*) = \vec{F}.\vec{V}^*$

C'est ainsi qu'on fait apparaître la notion de force représentée par $\vec{F}$ à partir de la notion de puissance virtuelle représentée par Φ. On dit que $\vec{F}$ apparaît par dualité.
On peut mettre en évidence de façon analogue le tenseur des contraintes de Cauchy à partir de la définition de la puissance virtuelle des efforts intérieurs.
Une première idée consiste à postuler que la forme linéaire continue caractérisant les efforts intérieurs s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{P}^*_{int} = \int_d \vec{\alpha}.\vec{V}^* dv}$$

On montre que la nullité de cette puissance pour tout mouvement rigidifiant d entraîne la nullité du champ vectoriel $\vec{\alpha}$.
Cherchons une forme linéaire du type :

$$\boxed{\mathcal{P}^*_{int} = -\int_d \overline{\overline{\alpha}} : \overline{\overline{grad\vec{V}^*}} dv}$$

En écrivant que $\mathcal{P}^*_{int}$ doit s'annuler pour tout mouvement rigidifiant d, On montre que $\overline{\overline{\alpha}}$ est nécessairement symétrique. Dans ce cas on peut écrire :

$$\boxed{\mathcal{P}^*_{int} = -\int_d \overline{\overline{\alpha}} : \overline{\overline{D}}^* dv}$$

où $\overline{\overline{D}}^*$ est la partie symétrique de $\overline{\overline{grad\vec{V}^*}}$.

Le tenseur $\overline{\overline{\alpha}}$ apparaît donc comme le tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\overline{\sigma}}$, on écrira :

$$\boxed{\mathcal{P}^*_{int} = -\int_d \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}^* dv}$$

Cette expression de $\mathcal{P}^*_{int}$ peut être transformée sans difficulté (Voir démonstration du théorème des puissances virtuelles §4) en :

$$\mathcal{P}^*_{int} = -\int_{\partial d} \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}.\vec{V}^* dS + \int_d div\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}^* dv$$

Cherchons la puissance virtuelle des efforts extérieurs (de contact et à distance) sous la forme :

$$\mathcal{P}^*_{ext} = \int_{\partial d} \vec{T}.\vec{V}^*\, dS + \int_d \vec{\phi}.\vec{V}^* dv$$

ce qui fait apparaître le vecteur contrainte $\vec{T}$ et la densité volumique des efforts à distance $\vec{\phi} = \rho\, \vec{f}_m$.
On écrira :

$$\mathcal{P}^*_{ext} = \int_{\partial d} \vec{T}.\vec{V}^*\, dS + \int_d \rho\, \vec{f}_m.\vec{V}^* dv$$

Il reste à définir la puissance virtuelle des quantités d'accélération. On prendra

$$\mathcal{P}^*_a = \int_d \rho\, \vec{\gamma}.\vec{V}^* dv$$

Pour la définition des puissances virtuelles nous avons utilisé des formes linéaires ne faisant intervenir que le champ des vitesses virtuelles $\vec{V}^*$ et son premier gradient $\overline{\overline{grad}}\vec{V}^*$. Cette démarche est intitulée <u>théorie du premier gradient</u>.

Jusqu'à présent, dans la schématisation des efforts, les grandeurs $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\vec{T}$ ont été introduites indépendamment l'une de l'autre. Elles vont être reliées dans la suite grâce au principe des puissances virtuelles.

c) Principe des puissances virtuelles:

<u>**Enoncé**</u> : Il existe au moins un référentiel dit galiléen tel que, à tout instant t, et pour tout domaine matériel $\boldsymbol{d}$ inclus dans un système matériel $\mathcal{D}$:

- la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans tout mouvement virtuel rigidifiant $\boldsymbol{d}$ est nulle ;
- dans tout mouvement virtuel de $\boldsymbol{d}$, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme de la puissance virtuelle des efforts extérieurs et de la puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$\boxed{\mathcal{P}^*_a = \mathcal{P}^*_{ext} + \mathcal{P}^*_{int}}.$$

Compte tenu des hypothèses faites sur $\mathcal{P}^*_a$, $\mathcal{P}^*_{ext}$ et $\mathcal{P}^*_{int}$, on peut écrire pour tout champ $\vec{V}^*$ et à chaque instant t :

$$\int_d \rho\, \vec{\gamma}.\vec{V}^* dv = \int_{\partial d} \vec{T}.\vec{V}^*\, dS + \int_d \rho\, \vec{f}_m.\vec{V}^* dv \;-\int_{\partial d} \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}.\vec{V}^*\, dS + \int_d div\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}^*\, dv$$

Ou encore :

$$\int_d \left(\rho\,\vec{\gamma} - \rho\,\vec{f}_m - div\overline{\overline{\sigma}}\right).\vec{V}^* dv + \int_{\partial d}\left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n} - \vec{T}\right).\vec{V}^*\, dS = 0\,.$$

Comme le champ $\vec{V}^*$ est arbitraire, on peut alors déduire que:

- en tout point de $\boldsymbol{d}$ (donc du système entier $\mathcal{D}$ si on prend $\boldsymbol{d} = \mathcal{D}$) et à chaque instant t, on a:

$$\left(\rho\,\vec{\gamma} - \rho\,\vec{f}_m - div\overline{\overline{\sigma}}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{div\overline{\overline{\sigma}} + \rho\,\vec{f}_m = \rho\,\vec{\gamma}}$$

- en tout point de $\partial\boldsymbol{d}$ et à chaque instant t, on a:

$$\left(\overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n} - \vec{T}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{T} = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}}$$

Nous venons donc de retrouver, grâce à l'application du principe des puissances virtuelles, les équations locales du mouvement et la relation entre le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ et le vecteur contrainte $\vec{T}$ pour la direction $\vec{n}$ (sans utiliser le théorème de Cauchy).
De façon plus générale, on peut montrer l'équivalence entre le principe des puissances virtuelles et le principe fondamental de la dynamique.