Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

$1^{ère}$ A G M

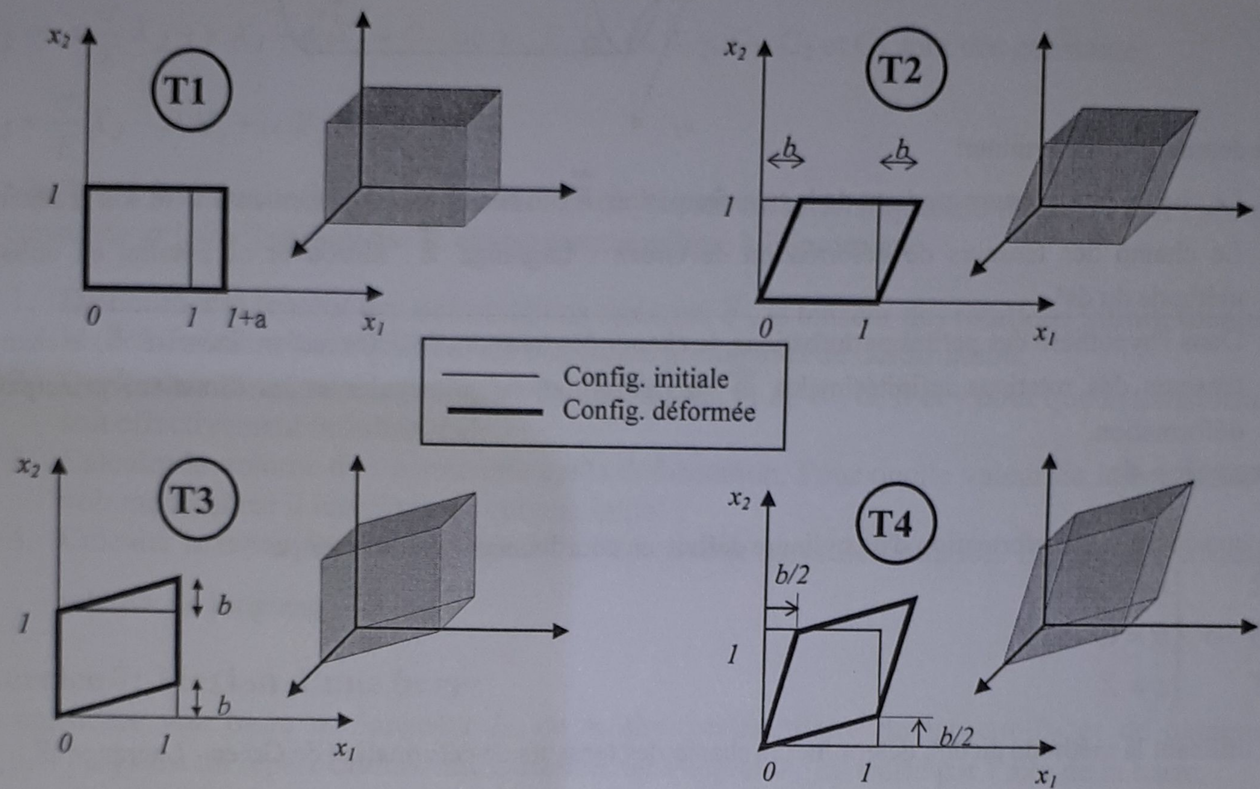
Mécanique des Milieux Continus

T.D. n°2

Exercice 1: Transformations planes

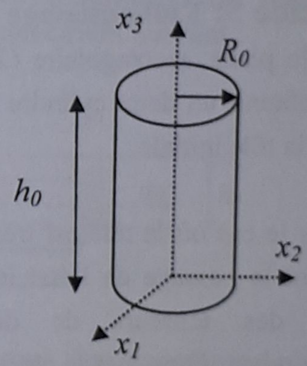
Déterminer, pour chacune des transformations planes homogènes définies ci-dessous:

1. Le tenseur gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}$, le champ de déplacement $\vec{u}$ et son gradient $\overline{\overline{H}}$.
2. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$ et la variation relative de volume: $(V-V_0)/V_0$.
3. Dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, le tenseur des déformations linéarisé $\overline{\overline{\varepsilon}}$, le tenseur des rotations infinitésimales $\overline{\overline{\varpi}}$, les déformations principales et les directions principales de déformation.



Exercice 2: Torsion d'une barre cylindrique

On considère une barre cylindrique de section circulaire. $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un repère orthonormé cartésien dans lequel $\vec{e}_3$ est porté par l'axe de la barre. On note h_0 et R_0 respectivement la hauteur et le rayon de la barre dans la configuration initiale. On suppose qu'à partir de cette configuration, la barre subit une transformation caractérisée par le champ de déplacement suivant :



$$\vec{u} = -\alpha\, X_2 X_3\, \vec{e}_1 + \alpha\, X_1 X_3\, \vec{e}_2$$

où α est une constante. (La transformation ainsi décrite correspond à un essai de torsion).

1) Calculer le volume de la barre après déformation.

2) Dans la suite on suppose que cette transformation est infinitésimale.

a) Comment se traduit cette hypothèse de transformation infinitésimale sur les constantes α, h_0 et R_0?

b) Déterminer le champ des tenseurs de déformation linéarisés.

c) Que peut-on dire du volume de la barre après déformation ?

d) Une fibre parallèle à Ox_3 subit-elle une variation de longueur ?

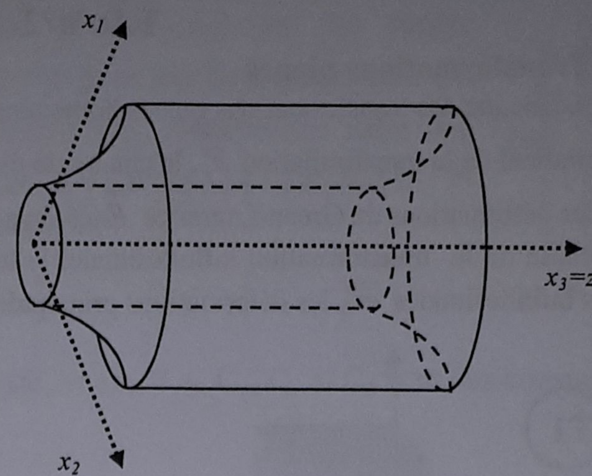
e) Les sections droites (X_3 = constante) de la barre sont elles déformées dans leurs plans ?

Donner alors une interprétation physique de la constante α (montrer pour cela qu'une section droite subit dans son plan un mouvement de solide rigide).

Exercice 3: Distorsion d'un cylindre

On considère la transformation d'un cylindre creux définie en coordonnées cylindriques par:

$$\begin{cases} R \\ \Theta \\ Z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta \\ z = Z + u(R) \end{cases}$$



On demande de déterminer:

1. Le champ des tenseurs gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}$, le champ des déplacements $\vec{u}$ et son gradient $\overline{\overline{H}}$.
2. Le champ des tenseurs de déformation de Green - Lagrange $\overline{\overline{E}}$. Retrouver ce résultat en utilisant la méthode du ds².
3. Dans l'hypothèse des petites perturbations, le champ des tenseurs de déformation linéarisé $\overline{\overline{\varepsilon}}$, le champ des tenseurs des rotations infinitésimales $\overline{\overline{\varpi}}$, les déformations principales et les directions principales de déformation.

Exercice 4:

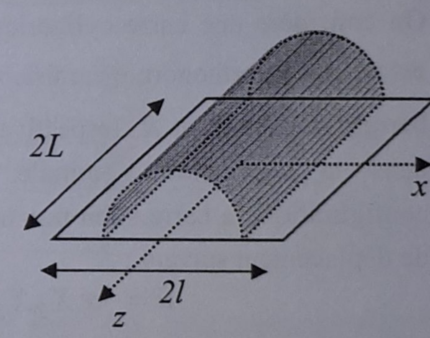
On considère la transformation d'un cylindre définie en coordonnées cylindriques par:

$$\begin{cases} R \\ \Theta \\ Z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta + \alpha Z \\ z = Z \end{cases}$$

En utilisant la méthode du ds², déterminer le champ des tenseurs de déformation de Green - Lagrange $\overline{\overline{E}}$.

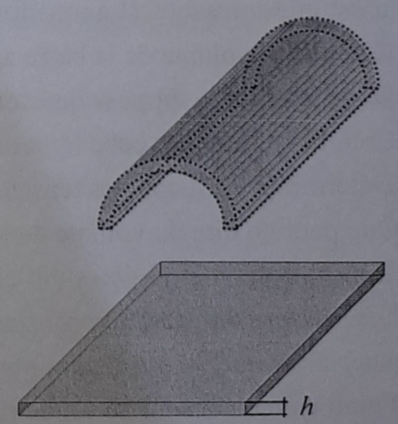
Exercice 5: Emboutissage d'une tôle

Une tôle plane, rectangulaire ($2l$ x $2L$) est emboutie à la presse afin d'obtenir un demi cylindre de rayon r_0 et de même longueur $2L$ que la tôle initiale.

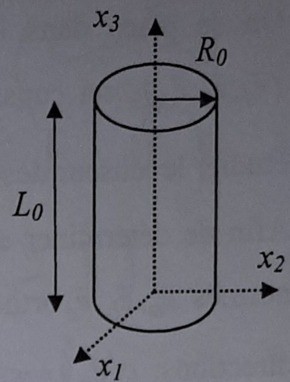


1) Dans le cas où la tôle est très mince, proposer une transformation décrivant le passage de l'état initial à l'état embouti. Déterminer le champ des tenseurs de déformation de Green –Lagrange correspondant. Examiner le cas général ($\pi.r_0 \neq 2\ l$) et le cas particulier où $\pi.r_0 = 2.\ l$

2) La tôle est maintenant considérée épaisse (épaisseur h). On suppose que les sections parallèles au plan yz restent planes, perpendiculaires au feuillet moyen et ne subissent pas de déformations dans leurs plans. Décrire cette transformation et donner le champ des tenseurs de déformation de Green Lagrange.



Exercice 6: Essai de traction / compression simple



On considère une éprouvette cylindrique de longueur initiale L_0 et de section circulaire de rayon initial R_0. $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un repère orthonormé cartésien dans lequel $\vec{e}_3$ est porté par l'axe de l'éprouvette. On suppose qu'à partir de cette configuration initiale, l'éprouvette subit une transformation vérifiant <u>les hypothèses des petites perturbations</u> et caractérisée par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1 = -\nu\dfrac{\sigma}{E}X_1 - \gamma X_2 + \beta X_3 + C_1 \\ u_2 = -\nu\dfrac{\sigma}{E}X_2 + \gamma X_1 - \alpha X_3 + C_2 \\ u_3 = \dfrac{\sigma}{E}X_3 - \beta X_1 + \alpha X_2 + C_3 \end{cases}$$

où ν, E, σ, α, β, γ, C_1, C_2 et C_3 sont des constantes.

E [N/m^2] et ν [sans unités] sont des constantes physiques caractéristiques du matériau de l'éprouvette. La constante σ [N/m^2] caractérise le chargement appliqué à l'éprouvette.

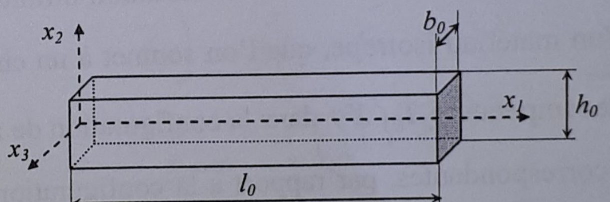
1. Déterminer le tenseur des déformations linéarisé $\overline{\overline{\varepsilon}}$, le tenseur des rotations infinitésimales $\overline{\overline{\omega}}$, les déformations principales et les directions principales de déformation.
2. Quelles conditions doivent vérifier les constantes ν, E, σ, α, β et γ pour que la transformation soit effectivement infinitésimale.
3. Calculer le volume de l'éprouvette après déformation. Pour quelle valeur de la constante ν le volume final est il identique au volume initial ?
4. Calculer le rayon R et la longueur L de l'éprouvette après déformation. En déduire la variation relative de longueur $\dfrac{\Delta L}{L_0}$.

Exercice 7: Flexion d'une barre

On considère une barre de longueur l_0, de section rectangulaire de largeur b_0 et de hauteur h_0. $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un repère orthonormé cartésien dans lequel $\vec{e}_1$ est porté par l'axe de la barre.

On suppose qu'à partir de sa configuration initiale, la barre subit une transformation vérifiant <u>les hypothèses des petites perturbations</u> et caractérisée par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{M}{EI}X_1X_2 \\ u_2 = \dfrac{M}{EI}\left(\dfrac{X_1^2}{2} + \nu\dfrac{X_2^2 - X_3^2}{2}\right) \\ u_3 = \nu\dfrac{M}{EI}X_2X_3 \end{cases}$$



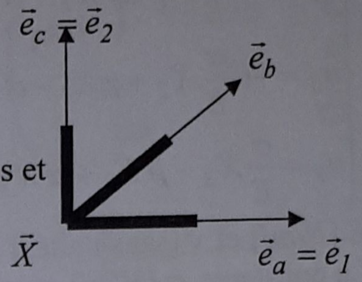
où ν, E, M, et I sont des constantes. E [N/m^2] et ν [sans unités] sont des constantes physiques caractéristiques du matériau de la barre. M [$N.m$] caractérise le chargement appliqué à la barre. I [m^4] est une caractéristique géométrique de la section de la barre.

1. Déterminer le tenseur des déformations linéarisé $\overline{\overline{\varepsilon}}$, le tenseur des rotations infinitésimales $\overline{\overline{\omega}}$, les déformations principales et les directions principales de déformation.
2. Quelles conditions doivent vérifier les constantes ν, E, M, et I pour que la transformation soit effectivement infinitésimale.
3. Calculer le volume de la barre après déformation. Commenter.
4. Montrer que les sections droites $X_1 = X_0$ restent droites après déformation.
5. Etablir l'équation de la déformée de la fibre moyenne ($X_2=X_3=0$) de la barre.
6. Montrer que les sections droites $X_1 = X_0$ restent normales à la fibre moyenne.

Exercice 8: Extensométrie

On se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Dans un repère orthonormé $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, on considère un état de déformation plane perpendiculairement à $\vec{e}_3$ et on cherche à étudier le tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{X},t)$ en un point matériel $\vec{X}$ et à l'instant t.

Afin de déterminer expérimentalement ce tenseur, on dispose selon les directions de trois vecteurs normés $\vec{e}_a,\vec{e}_b,\vec{e}_c$ orthogonaux à $\vec{e}_3$, des jauges extensométriques donnant les allongements selon ces directions: $\varepsilon(\vec{e}_a)=\varepsilon_a, \varepsilon(\vec{e}_b)=\varepsilon_b, \varepsilon(\vec{e}_c)=\varepsilon_c$.



1. Donner l'expression du tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}(X,t)$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.
2. Déterminer dans chacun des cas suivants les déformations principales et les directions principales de déformation:

   a) $\varepsilon_a = 2\varepsilon_b = \varepsilon$ et $\varepsilon_c = 0$

   b) $\varepsilon_a = \varepsilon_c = 0$ et $\varepsilon_b = \varepsilon$

Exercice 9: Détermination du champ de déplacement à partir de celui de déformation

Déterminer, dans l'hypothèse de transformation infinitésimale, le champ de déplacement correspondant à chacun des états de déformation suivants :

a) Déformation homogène : $\varepsilon_{ij}(\vec{X},t)=\varepsilon^0_{ij}(t)$

b) Déformation linéaire : $\varepsilon_{ij}(\vec{X},t)=\alpha_{ijl}(t).X_l$ avec $\alpha_{ijl}=\alpha_{jil}$

Exercice 10: Compatibilité des déformations thermiques

On se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. On considère un solide homogène, constitué d'un matériau isotrope, que l'on soumet à un champ d'écart de température $\tau(\vec{X})$ à partir du champ de température $T_0(\vec{X})$ dans la configuration de référence. On suppose que les déformations thermiques correspondantes, par rapport à la configuration de référence sont linéaires (par rapport à l'écart de température $\tau(\vec{X})$) et de la forme :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{X})=\alpha\tau(\vec{X}).\bar{\bar{I}}$$

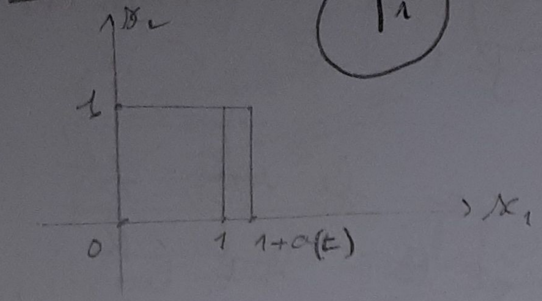
où α est la constante thermique caractéristique de ce matériau.

1. Quelle doit être la forme du champ τ pour que ces déformations thermiques soient géométriquement compatibles hors de toute condition sur les déplacements imposée à la frontière du solide.
2. En utilisant les résultats de l'exercice précédant, déterminer la forme du champ de déplacement correspondant au champ de déformations thermiques ainsi obtenu.

TD 2

Exo 1

T1



Transformation homogène et plane;

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \delta_1 \\ x_2 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \delta_2 \\ x_3 = \alpha_3 X_3 \end{cases}$$

$(X_1, X_2, X_3) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$

$(0,0,0) \longrightarrow (0,0,0)$

$(0,1,0) \longrightarrow (0,1,0)$

$(1,0,0) \longrightarrow (1+a,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \alpha_1 = 1+a \qquad \alpha_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = (1+a) X_1 . \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{u = \vec{X} - \vec{x}}$

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a X_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{H}} = \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}})$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}})$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{\overline{F}}^2 - \overline{\overline{I}})$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+1)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{1 \times 1 \times (1+a) - 1 \times 1 \times 1}{1 \times 1 \times 1} = a$$

on sait que $dV = J \, dV_0$

si la transformation est homogène

$$\boxed{V = J V_0}$$

$$\Rightarrow \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\cancel{V_0}}{\cancel{V_0}}(J-1)$$

$J = \det(\overline{\overline{F}}) = 1+a.$

3) $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\omega}}$

$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T) \qquad \overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T)$

$\overline{\overline{\omega}} = \overline{0}$ et $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{H}}$.

HPP $|H_{ij}| << 1$.

$\Rightarrow |a| << 1$.

déformation principales:

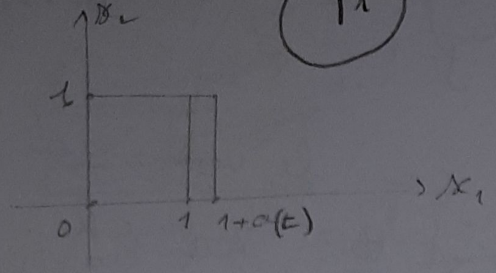
$\varepsilon_1 = a, \; \varepsilon_2 = 0, \; \varepsilon_3 = 0$

la base principale de la déformation c'est la base actuelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

TD 2

Exo 1

T1



Transformation homogène et plane;

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \delta_1 \\ x_2 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \delta_2 \\ x_3 = \alpha_3 X_3 \end{cases}$$

$(X_1, X_2, X_3) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$

$(0,0,0) \longrightarrow (0,0,0)$

$(0,1,0) \longrightarrow (0,1,0)$

$(1,0,0) \longrightarrow (1+a,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0 & \alpha_1 = 1+a \\ \delta_2 = 0 & \\ \beta_2 = 1 & \alpha_2 = 0 \\ \beta_1 = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (1+a) X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{u = \vec{X} - \vec{x}}$

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a X_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{H}} = \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^2 - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+1)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{1 \times 1 \times (1+a) - 1 \times 1 \times 1}{1 \times 1 \times 1} = a$$

on sait que $dV = J\, dV_0$

si la transformation est homogène

$$V = J V_0$$

$$\Rightarrow \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\cancel{V_0}}{\cancel{V_0}}(J-1)$$

$J = \det(\bar{\bar{F}}) = 1+a.$

3) $\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\omega}}$

$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T) \qquad \bar{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} - \bar{\bar{H}}^T)$

$\bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{0}}$ et $\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{H}}.$

H.P.P. $|H_{ij}| << 1.$

$\Rightarrow |a| << 1.$

déformation principales:

$\varepsilon_1 = a, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0.$

la base principale de la déformation c'est la base actuelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

(T2) voir figure.

transf homogène et plane

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \delta_1 \\ x_2 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \delta_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$(X_1, X_2, X_3) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$

$(0,0,0) \longrightarrow (0,0,0)$

$(1,0,0) \longrightarrow (1,0,0)$

$(0,1,0) \longrightarrow (b,1,0)$

$$\begin{cases} \delta_1 = 0, \ \delta_2 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0 \\ \beta_1 = b, \ \beta_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + b X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = b X_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}})$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & \frac{b^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = J - 1 = 0$$

attendu car le volume qui est ajouté est le même retranché. (partie hachurée)

3) H.T.I $\quad \# \ |b| \ll 1$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} - \bar{\bar{H}}^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ -\frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\bar{\bar{\varepsilon}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{b}{2}, \ \varepsilon_2 = -\frac{b}{2}, \ \varepsilon_3 =$$

Soit $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ associé à $\varepsilon_1 = \frac{b}{2}$

$\bar{\bar{\varepsilon}} \vec{p}_1 = \frac{b}{2} \vec{p}_1$

$$\begin{cases} \frac{b}{2} b_1 = \frac{b}{2} a_1 \\ \frac{b}{2} a_1 = \frac{b}{2} b_1 \\ 0 = \frac{b}{2} c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \quad a_1 = a_2$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_2$$

$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ associé à $\varepsilon_2 = -\frac{b}{2}$

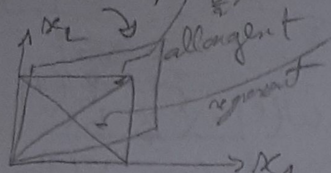
$$\begin{cases} \frac{b}{2} b_2 = -\frac{b}{2} a_2 \\ \frac{b}{2} a_2 = -\frac{b}{2} b_2 \\ 0 = -\frac{b}{2} c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases} \quad a_2 = -b_2$$

$\boxed{\vec{p}_3 = \vec{e}_3}$

$\vec{p} \quad \sqrt{2} \rightarrow \quad \sqrt{2} \rightarrow$

ds la base principale

$(\vec P_1, \vec P_2, \vec P_3)$: $\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



il faut une rotation pour avoir le m̂ schéma

rappel

si $\bar{\bar A}$ est antisymétrique

$$\bar{\bar A} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_{123} A_{23} - \frac{1}{2} \varepsilon_{132} A_{32}$$

$$= -\frac{1}{2} A_{23} + \frac{1}{2} A_{32} = A_{32}$$

on a ds $(\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$

$$\bar{\bar W} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ -\frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma(\vec e_1, \vec e_2) = 2 \vec e_1 \cdot \bar{\bar\varepsilon} \cdot \vec e_2 = 2\varepsilon_{12} = b$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$tg(\gamma) = \frac{b}{1} = b \simeq \gamma$$

EX ② :

$$\vec u \begin{cases} u_1 = -\alpha x_2 x_3 \\ u_2 = \alpha x_1 x_3 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

1) $dV = J \, dV_0$.

transf n'est pas homogène car $\vec u$ n'est pas linéaire.

$$\bar{\bar H} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & -\alpha x_2 \\ \alpha x_3 & 0 & \alpha x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F = \bar{\bar I} + \bar{\bar H} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha x_3 & -\alpha x_2 \\ \alpha x_3 & 1 & \alpha x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \det(\bar{\bar F}) = 1 + \alpha^2 x_3^2$$

$$V = \iiint_{D_0} (1 + \alpha^2 x_3^2) \, dV_0$$

$$= V_0 + \alpha^2 \iiint_{D_0} x_3^2 \, dV_0$$

$$= V_0 + \alpha^2 \iiint x_3^2 \underbrace{dx_1 \, dx_2 \, dx_3}_{\text{rotateur}}$$

en cylindrique

$$= V_0 + \alpha^2 \pi R_0^2 \frac{h_0^3}{3}$$

$$V = V_0 \left(1 + \frac{\alpha^2 h_0^2}{3}\right)$$

2) a) H. T. I.

$|H_{ij}| << 1 \quad \forall \vec x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha x_1| << 1 \\ |\alpha x_2| << 1 \\ |\alpha x_3| << 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| << \frac{1}{|x_1|} \\ |\alpha| << \frac{1}{|x_2|} \\ |\alpha| << \frac{1}{|x_3|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha| << \frac{1}{R_0} \\ |\alpha| << \frac{1}{R_0} \\ |\alpha| << 1 \end{cases} \Rightarrow |\alpha| << \min\left(\frac{1}{R_0}, \dots\right)$$

b) $\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(H + {}^tH)$.

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}x_1 \\ -\frac{\alpha}{2}x_2 & \frac{\alpha}{2}x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $dV = J\, dV_0$

H.T.I

$\boxed{J = 1 + \text{trace}(\bar{\bar{\varepsilon}})}$

$J = 1$

$dV = dV_0 \Rightarrow V = V_0$

on a d'après 1/

$V = V_0\left(1 + \frac{h_0^2\alpha^2}{3}\right)$.

si $|\alpha| << \frac{1}{h_0}$ H.T.I

$|\alpha h_0| << 1$.

$\sim \frac{1}{100}$

$\Rightarrow V \simeq V_0$.

d) $\varepsilon(\vec{e_3}, \Pi_0) = \vec{e_3} \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}(\Pi_0) \cdot \vec{e_3} = \varepsilon_{33} = 0$

$\Rightarrow$ pas de variation de longueur d'une fibre // à $(0x_3)$

e) soit $\vec{n_0}$ un vecteur unitaire // à une section $x_3 = cte$.

$$\varepsilon(\vec{n_0}, \Pi_0) = \vec{n_0} \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}(\Pi_0) \cdot \vec{n_0}$$

$$= \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2}x_2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}x_1 \\ -\frac{\alpha x_2}{2} & \frac{\alpha x_1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ la section $x_3 = cte$ ne se déforme pas ds son plan.

Rappel :

Deplacement ds solide rigide ds l'H.T.I

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{\omega}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{b}(t)$$

$$= \vec{\omega}(t) \wedge \vec{X} + \vec{b}(t).$$

On a $\vec{u} = -\alpha x_2 x_3 \vec{e_1} + \alpha x_1 x_3 \vec{e_2}$

$$= \alpha x_3(-x_2\vec{e_1} + x_1\vec{e_2})$$

$$= \underbrace{\alpha x_3 \vec{e_3}}_{\vec{\omega}(x_3,t)} \wedge \underbrace{(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3})}_{\vec{X}}$$

ordin. par abstr.

chaque section $x_3 = cte$ subit un mvt de rotation de solide rigide d'angle $\tilde{\omega}(x_3, t) = \alpha(t)$.

pour $x_3 = 0 \Rightarrow \omega(0, t) = 0$ (base fixe)

$x_3 = h_0 \Rightarrow \omega(h_0, t) = \alpha h_0 = \varphi_0$

$\alpha = \frac{\varphi_0}{h_0}$ rad/m.

angle unitaire de Torsion.

Ex 3

$M_0 \begin{vmatrix} R \\ \Theta \\ Z \end{vmatrix} \longrightarrow M \begin{vmatrix} r = R \\ \theta = \Theta \\ z = Z + u(R) \end{vmatrix}$

$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ base cart fixe.

$(\vec{e_R}, \vec{e_\Theta}, \vec{e_Z})$ base cylindrique initiale

$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ base cylindrique ds la configuration déformée.

$\vec{e_R} = \cos(\Theta)\,\vec{e_1} + \sin(\Theta)\,\vec{e_2}$.

$\vec{e_\Theta} = -\sin(\Theta)\,\vec{e_1} + \cos(\Theta)\,\vec{e_2}$

$\vec{e_Z} = \vec{e_3}$

$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos(\theta)\,\vec{e_1} + \sin(\theta)\,\vec{e_2} \\ \vec{e_\theta} = -\sin(\theta)\,\vec{e_1} + \cos(\theta)\,\vec{e_2} \\ \vec{e_z} = \vec{e_3}. \end{cases}$

comme $\theta = \Theta \Rightarrow \vec{e_r} = \vec{e_R}$, $\vec{e_\theta} = \vec{e_\Theta}$.

$\Rightarrow \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{Grad}}(\vec{x})$ / $\vec{X} = R\vec{e_R} + Z\vec{e_Z}$

$\vec{x} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$.

$\vec{x} = R\vec{e_R} + (Z + u(R))\,\vec{e_Z}$

$$\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u'(R) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = u(R)\,\vec{e_Z}$

$$\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{Grad}}(\vec{u}) = \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u'(R) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}})$

$= \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}})$.

$$\bar{\bar{F}}^T\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u'(R) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u'(R) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + u'(R)^2 & 0 & u'(R) \\ 0 & 1 & 0 \\ u'(R) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode ds^2 :

$ds^2 - ds_0^2 = 2\,[dM_0]_i\,[dM_0]_j\,E_{ij}$

$= 2dRdR\,E_{RR} + 2dR\,Rd\Theta\,E_{R\Theta} + \dots + 2dZdZ\,E_{ZZ}$

$ds_0^2 = d\vec{M_0}\cdot d\vec{M_0}$

$d\vec{M_0} = d(\vec{OM_0}) = d(R\vec{e_R} + Z\vec{e_Z})$

$= dR\,\vec{e_R} + Rd\Theta\,\vec{e_\Theta} + dZ\,\vec{e_Z}$

$ds_0^2 = dR^2 + (Rd\Theta)^2 + dZ^2$.

$ds^2 = d\vec{M}\cdot d\vec{M}$

$d\vec{M} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$

on calcul chaque vect ds sa base car la norme ne change pas en changeant la base (pour faciliter les calculs) après le produit scalaire on exprime ds la base où on travail.

$d\vec{M}\cdot d\vec{M} \overset{\Delta}{=} dr^2 + (r\,d\theta)^2 + (dz)^2$

$ds^2 \overset{\Delta}{=} dR^2 + R^2 d\Theta^2 + \left(dZ + \frac{u'(R)}{dR}\right)^2$

$ds^2 - ds_0^2 = 2\Big(\underbrace{\frac{(u'(R))^2}{2}}_{E_{RR}} dR^2 + 2\frac{u'(R)}{2}\,dR\,dZ\Big)$

$E_{RZ} = E_{ZR} \quad = 2E_{RZ}$

$$\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} \frac{(u'(R))^2}{2} & 0 & \frac{u'}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{u'}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T\right)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{u'}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{u'}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{W}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{H}} - \bar{\bar{H}}^T\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{u'}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{u'}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\bar{\bar{\varepsilon}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \frac{u'}{2} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \frac{u'}{2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{u'^2}{4}\right) = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{u'}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{u'}{2}, \quad \varepsilon_3 = 0$$

$$\vec{p_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u'}{2} c_1 = \frac{u'}{2} a_1 \\ 0 = \frac{u'}{2} b_1 \\ \frac{u'}{2} a_1 = \frac{u'}{2} c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = c_1 \\ b_1 = 0 \end{array}$$

$$\vec{p_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_R} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_Z}$$

$$\vec{p_2}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \varepsilon_2 = -\frac{u'}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} b_2 = 0 \\ a_2 = -c_2 \end{array}$$

$$\vec{p_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_R} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_Z}$$

$$\vec{p_3} = \vec{e_\theta}$$

EX (4) :

$$M_0 \begin{vmatrix} R \\ \Theta \\ Z \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r = R \\ \theta = \Theta + \alpha Z \\ z = Z \end{pmatrix}$$

$\bar{\bar{\varepsilon}}$?

$$ds^2 - ds_0^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 - dR^2 - R^2 d\Theta^2 - dZ^2$$

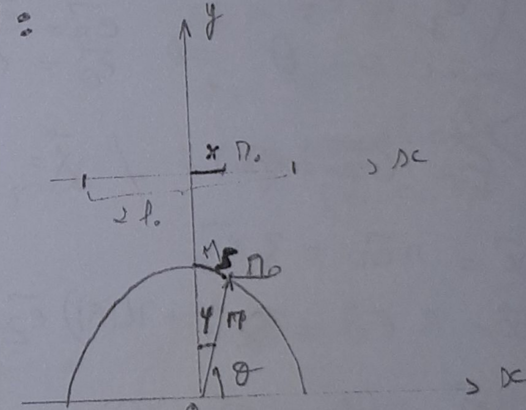
$$= \cancel{dR^2} + R^2(d\Theta + \alpha Z)^2 + \cancel{dZ^2} - \cancel{dR^2} - R^2 d\Theta^2 - \cancel{dZ^2}$$

$$= 2\alpha R^2 d\Theta dZ + \alpha^2 R^2 dZ^2$$

$$= 2\left(\alpha R^2 d\theta dZ + \frac{\alpha^2}{2} R^2 dZ^2\right)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha R}{2} \\ 0 & \frac{\alpha R}{2} & \frac{\alpha^2 R^2}{2} \end{pmatrix}$$

EX (5) :



$$M_0 \begin{pmatrix} x \in [-l_0, l_0] \\ y = 0 \\ z \in [-L, L] \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} r = r_0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ z = Z \end{pmatrix}$$

règle de 3

$2l_0 \longrightarrow \pi r_0$

$l_0 \longrightarrow \frac{\pi r_0}{2}$

$x \longrightarrow s = \frac{\pi}{2} r_0 \frac{x}{l_0} \Rightarrow \varphi = \frac{s}{r_0} = \frac{\pi x}{2l}$

$$ds^2 - ds_0^2 = \underbrace{dr^2}_{0} + r^2 d\theta^2 + dz^2 - dx^2 - \underbrace{dy^2}_{0} - dz^2$$

car ($r = r_0$) cte ; y ne varie pas

$$ds^2 - ds_0^2 = r^2 d\theta^2 - dx^2$$
$$= r_0^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 dx^2 - dx^2$$
$$= 2\underbrace{\left(\frac{\pi^2 r_0^2}{2\times 4\ell^2} - \frac{1}{2}\right)}_{E_{xx}} dx^2$$

cas $\pi r_0 = 2\ell$.

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{0}}$$

on a $\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{0}}$ pour mvt π solide rigide. ce n'est pas le cas car le milieu est surfacique (en cours on a milieu tridimentionel)

2) $\Pi_0 \begin{cases} x \in [-\ell_0, \ell_0] \\ y \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ z \in [-L, L] \end{cases}$

$\Pi \begin{cases} r = r_0 + y \\ \theta = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{\ell}) \\ z = Z \end{cases}$

$$ds^2 - ds_0^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$
$$= \cancel{dy^2} + (r_0 + y)^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 dx^2 + \cancel{dz^2} - dx^2 - \cancel{dy^2} - \cancel{dz^2}$$

$$= 2\underbrace{\left(\frac{(r_0+y)^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 - 1}{2}\right)}_{E_{xx}} dx^2$$

pour $\pi r_0 = 2\ell \Rightarrow \bar{\bar{E}} \neq \bar{\bar{0}}$

sauf pour $y = 0$.

Ex6 :

1) $\bar{\bar{H}} = \overline{\overline{grad}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{\nu\sigma}{E} & -\gamma & \beta \\ \gamma & -\frac{\nu\sigma}{E} & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \frac{\sigma}{E} \end{pmatrix}$

transformation homogène.

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{E} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

déf principale $\varepsilon_1 = -\frac{\nu\sigma}{E}$

$\varepsilon_2 = -\frac{\nu\sigma}{E}$

$\varepsilon_3 = \frac{\sigma}{E}$

base principale = base actuelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

rappel :

transformation homogène et infinitésimal

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{\varepsilon}}(t)\vec{X} + \underbrace{\bar{\bar{\omega}}.\vec{X} + \vec{b}(t)}_{D.S.R}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{X} + \vec{b}(t)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{0}} \Rightarrow \vec{u}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{\omega}}.\vec{X} + \vec{b}(t)$$

2) H.T.I $|\alpha| \ll 1$; $|\beta| \ll 1$; $|\gamma| \ll$

$\left|\frac{\nu\sigma}{E}\right| \ll 1$ et $\left|\frac{\sigma}{E}\right| \ll 1$

3) $dV = J\, dV_0$

$\Downarrow$ T. homogène

$V = J\, V_0$

$J = 1 + \mathrm{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = 1 + \frac{\sigma}{E}(1-2\nu)$

$$V = V_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}(1-2\nu)\right)$$

$V = V_0$ si $\nu = \frac{1}{2}$

4) $R = ?$ et $L = ?$

$$\varepsilon(\vec{n}_0, n_0) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \vec{n}_0\, \bar{\bar{\varepsilon}}(n_0)\, \vec{n}_0$$

Pour $\vec{dl}_{01} = dl_{01}\, \vec{e_1}$

$\longrightarrow dl_1 \;/\; \frac{dl_1 - dl_{01}}{dl_{01}} = \vec{e}_1 \bar{\bar{\varepsilon}}(n_0)\vec{e_1} = \varepsilon_{11} = -\frac{\sigma\nu}{E}$

$$\int_0^R dl_1 = \int_0^{R_0} (1+\varepsilon_{11})\, dl_{01}$$

$\Longrightarrow R = (1+\varepsilon_{11})R_0$

$R = \left(1 - \frac{\nu\sigma}{E}\right) R_0$

$\begin{cases} \text{traction } (\sigma > 0) \text{ donc } R < R_0 \\ \text{compression } (\sigma < 0) \text{ donc } R > R_0 \end{cases}$

$\vec{dl}_{03} = dl_{03}\, \vec{e}_3$

$dl_3 = (1+\varepsilon_{33})\, dl_{03}$

$L = (1+\varepsilon_{33})\, \cancel{l_0}$

$L = \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) L_0$ traction $\rightarrow L > L_0$

compression $L < L_0$

$\frac{L - L_0}{L} = \varepsilon_{33} = \frac{\sigma}{E}$ (en sachant que σ ...)

EX 7

$$\bar{\bar{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{\Pi}{EI}x_2 & -\frac{\Pi}{EI}x_1 & 0 \\ \frac{\Pi}{EI}x_1 & \frac{\sigma\Pi}{EI}x_2 & -\frac{\sigma\Pi}{EI}x_3 \\ 0 & \frac{\sigma\Pi}{EI}x_3 & \frac{\sigma\Pi}{EI}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\frac{\Pi x_2}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma\Pi x_2}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma\Pi x_2}{EI} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{W}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Pi x_1}{EI} & 0 \\ \frac{\Pi x_1}{EI} & 0 & -\frac{\sigma\Pi x_3}{EI} \\ 0 & \frac{\sigma\Pi x_3}{EI} & 0 \end{pmatrix}$$

Défo principal dans la base actuelle $\varepsilon_1 = -\frac{\Pi}{EI}x_2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\sigma\Pi}{EI}x_2$

2) H. T. I.

$\left|\frac{\Pi}{EI}x_1\right| \ll 1$, $\left|\frac{\sigma\Pi}{EI}x_2\right| \ll 1$, $\left|\frac{\Pi x_2}{EI}\right| \ll 1$

$\left|\frac{\sigma\Pi x_3}{EI}\right| \ll 1$

$\left|\frac{\Pi}{EI}\right| \ll \min\left(\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|\sigma x_2|}, \frac{1}{|x_2|}, \frac{1}{|\sigma x_3|}\right)$

$\left|\frac{\Pi}{EI}\right| \ll \min\left(\frac{1}{l_0}, \frac{2}{\sigma h_0}, \frac{2}{h_0}, \frac{2}{\sigma b_0}\right)$

3) $dV = J\, dV_0 \Rightarrow dV = \left(1 + \frac{\Pi}{EI}x_2(2\sigma - 1)\right)$

$$V = V_0 + \frac{\Pi}{EI}(2\nu - 1)\int_0^{l_0}\int_{-h_0/2}^{h_0/2}\int_{-b_0/2}^{b_0/2} x_2\, dX_1\, dX_2\, dX_3$$

$$ds^2 - ds_0^2 = \underbrace{dr^2}_{\substack{0 \\ \text{car } (r=r_0) \\ \text{cte}}} + r^2 d\theta^2 + dz^2 - dx^2 - \underbrace{dy^2}_{\substack{0 \\ y \text{ ne} \\ \text{varie pas}}} - dz^2$$

$$ds^2 - ds_0^2 = r^2 d\theta^2 - dx^2$$

$$= r_0^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 dx^2 - dx^2$$

$$= 2 \underbrace{\left(\frac{\pi r_0^2}{2 \times 4 \ell^2} - \frac{1}{2}\right)}_{E_{xx}} dx^2$$

cas $\pi r_0 = 2\ell$.

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{0}}$$

r on a $\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{0}}$ pour mvt solide rigide. ce n'est pas le cas car le milieu est surfacique (en cours on a milieu tridimentionel)

2) $\Pi_0 \begin{cases} x \in [-\ell, \ell] \\ y \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ z \in [-L, L] \end{cases}$

$$\Pi \begin{cases} r = r_0 + y \\ \theta = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{x}{\ell}) \\ z = z \end{cases}$$

$$ds^2 - ds_0^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= \cancel{dy^2} + (r_0 + y)^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 dx^2 + \cancel{dz^2} - dx^2 \cancel{- dy^2} \cancel{- dz^2}$$

$$= 2 \underbrace{\left(\frac{(r_0+y)^2 \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 - 1}{2}\right)}_{E_{xx}} dx^2$$

pour $\pi r_0 = 2\ell \Rightarrow \bar{\bar{E}} \neq \bar{\bar{0}}$

sauf pour $y = 0$.

Ex6 :

1) $\bar{\bar{H}} = \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{\nu\sigma}{E} & -\gamma & \beta \\ \gamma & -\frac{\nu\sigma}{E} & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \frac{\sigma}{E} \end{pmatrix}$

transformation homogène.

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{E} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

déf principale $\quad \varepsilon_1 = -\frac{\nu\sigma}{E}$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma}{E}$$

base principale = base actuelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

rappel :

transformation homogène et infinitésimal

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{\varepsilon}}(t)\vec{X} + \underbrace{\bar{\bar{\omega}}.\vec{X} + \vec{b}(t)}_{D.S.R}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{X} + \vec{b}(t)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{0}} \Rightarrow \vec{u}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{\omega}}.\vec{X} + \vec{b}(t)$$

2) H.T.I $\quad |\alpha| \ll 1 \;, \; |\beta| \ll 1 ; |\gamma| \ll$

$$\left|\frac{\nu\sigma}{E}\right| \ll 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sigma}{E}\right| \ll 1$$

1) $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t)$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - \frac{\Pi}{EI} X_1 X_2 \\ x_2 = X_2 + \frac{\Pi}{EI}\left(\frac{X_1^2}{2} + \nu\left(\frac{X_2^2 - X_3^2}{2}\right)\right) \\ x_3 = X_3 + \frac{\nu\Pi}{EI} X_2 X_3 \end{cases}$$

hyp de petits déplacement $x \sim X$

$x_1(X_0, x_2) \sim x_1(X_0, X_2)$

$$\begin{cases} x_1 = X_0 - \frac{\Pi}{EI} X_0 X_2 \\ x_2 = X_2 + \frac{\Pi}{EI}\left(\frac{X_0^2}{2} + \nu\left(\frac{X_2^2 - X_3^2}{2}\right)\right) \\ x_3 = X_3 + \frac{\nu\Pi}{EI} X_2 X_3 . \end{cases}$$

eq (1) $\Rightarrow$ $x_1 = X_0 - \frac{\Pi}{EI} X_0 X_2$

$$\underbrace{}_{a} x_1 + \underbrace{\frac{\Pi}{EI} X_0}_{b} x_2 = \underbrace{X_0}_{d}$$

Eq d'un plan

$a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$.

$$\vec{n}_{plan} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

5) def de la ligne moyenne.

$X_2 = 0, \; X_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = \frac{\Pi}{EI} \frac{X_1^2}{2} . \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\Pi}{EI} \frac{x_1^2}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

parabole ds le plan (x_1, x_2)

6) Soit $\vec{n}_{plan}$ la normale à la section après déformation

$\vec{n}_{plan} = \vec{e_1} + \frac{\Pi}{EI} X_0 \vec{e_2}$.

Soit $\vec{t}$ vecteur tg à la déformation de la ligne moyenne.

$\vec{t} = \vec{e_1} + \frac{\Pi}{EI} X_0 \vec{e_2}$.

$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds}$ $\left(\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{dx_1} \; \ldots \right)$

Exo 9 -

a) def homogène $\varepsilon_{ij}(\vec{X}, t) = \varepsilon^0_{ij}(t)$

i) eq de compatibilité.

les dérivé partielles de ε_{ij} sont nulls donc l'eq de compat sont automatiquement vérifiés.

ii) calcul de rotation w_{ij}.

$dw_{ij} = w_{ij,l} \, dX_l$

on a $w_{ij,l} = \varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i}$

$w_{ij,l} = 0$

$w_{ij} = w_{ij}(t)$

iii) calcul ds u_i :

$du_i = (\varepsilon_{ij} + w_{ij}) \, dX_j$

$u_i = (\varepsilon^0_{ij}(t) + w^0_{ij}(t)) X_j + b_i(t)$

$u_i = \varepsilon_{ij}(t) X_j + w_{ij}(t) X_j + b_i(t)$

$v_i(\vec{x}, t) = \bar{\bar{\varepsilon}}^{0}(t)\,\vec{x} + \omega^{0}(t)\,\vec{x} + b(t)$ c) déformation affine.

2) $\alpha_{ijl} = \alpha_{jil}$ D.S.R $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) = \alpha_{ijl}(t)\,x_l + \varepsilon^{0}_{ij}(t)$

a) Def linéaire $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) = \alpha_{ij}(t)\,x_l$

$\varepsilon^{(a)}_{ij} \longrightarrow v^{(a)}_i$

$\varepsilon^{(b)}_{ij} \longrightarrow v^{(b)}_i$

i) eq des compatibilité,

les dérivés partielles secondes des ε_{ij} sont nulls, donc les eq de compatib sont automatiquement vérifiés.

$\varepsilon^{(c)}_{ij} = \varepsilon^{(a)}_{ij} + \varepsilon^{(b)}_{ij} \longrightarrow v^{(c)}_i = v^{(a)}_i$

$v_i = \frac{1}{2}\psi_{ijl}\,x_j x_l + \varepsilon^{0}_{ij}\,x_j + \omega^{0}_{ij}(t)\,x_j + b_i(t)$

ii) calcul des rotation ω_{ij}:

$d\omega_{ij} = \omega_{ij,l}\,dx_l$

$\omega_{ij,l} = \varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i}$

$= \alpha_{ilj} - \alpha_{jli}$

~~$\varepsilon_{ij,k}$~~

$\varepsilon_{ij,k} = \alpha_{ijl}\,x_{l,k} = \alpha_{ijl}\,\delta_{lk}$

$= \alpha_{ijk}$

$d\omega_{ij} = (\alpha_{ilj} - \alpha_{jli})\,dx_l$

$\omega_{ij} = (\alpha_{ilj} - \alpha_{jli})\,x_l + \omega^{0}_{ij}(t)$

iii) calcul des v_i,

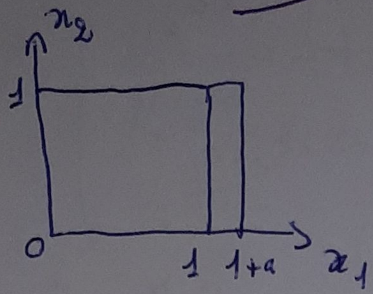
$dv_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\,dx_j$

$dv_i = \underbrace{(\alpha_{ijl} + \alpha_{ilj} - \alpha_{jli})}_{\psi_{ijl} = \psi_{ilj}}\,x_l\,dx_j + \omega^{0}_{ij}(t)\,dx_j$

$v_i = \frac{1}{2}\psi_{ijl}\,x_l x_j + \omega^{0}_{ij}\,x_j + b_i(t)$

$dv_i = \frac{1}{2}\psi_{ijl}\,x_l\,dx_j + \frac{1}{2}\underbrace{\psi_{ijl}}_{\psi_{ilj}}\,x_j\,dx_l + \omega_{ij}\,dx_j$

ex 1 : TD n°2 transformation homogène et plane



$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \delta_1 \\ x_2 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \delta_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$(X_1, X_2, X_3) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$

$(0,0,0) \longrightarrow (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0 \end{cases}$

$(0,1,0) \longrightarrow (0,1,0) \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$

$(1,0,0) \longrightarrow (1+a, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1+a \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = (1+a) X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a X_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{H}} = (\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T F - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+a)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{(1+a) \times 1 \times 1 - 1 \times 1 \times 1}{1 \times 1 \times 1} = a$$

$dV = J dV_0$

or T. homogène $\Rightarrow V = J V_0 \Rightarrow \frac{V - V_0}{V_0} = J - 1$

$J = \det(\bar{\bar{F}}) = 1 + a$ donc $\boxed{\frac{V - V_0}{V_0} = a}$

3) $\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\omega}}$ avec $\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T)$ $\quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\bar{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} - \bar{\bar{H}}^T)$ $\quad \bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{0}}$

Déf principale : $\varepsilon_1 = a$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$

Base principale des déformation Base actuelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

* (T2) :

$(X_1, X_2, X_3) \to (x_1, x_2, x_3)$

$(0,0,0) \to (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases}\delta_1=0\\ \delta_2=0\end{cases}$

$(1,0,0) \to (1,0,0) \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=0\end{cases}$

$(0,1,0) \to (b,1,0) \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=b\\ \beta_2=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 + bX_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3\end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix}1&b&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = \begin{cases} u_1 = bX_2\\ u_2 = 0\\ u_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{H}} = \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix}0&b&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2) $\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}})$

$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\b&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&b&0\\b&1+b^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix}0&\frac{b}{2}&0\\ \frac{b}{2}&\frac{b^2}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{V-V_0}{V_0} = J-1 = 0$

3) H.T.I $\quad |b| \ll 1$

$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T) = \begin{pmatrix}0&\frac{b}{2}&0\\ \frac{b}{2}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\bar{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} - \bar{\bar{H}}^T) = \begin{pmatrix}0&\frac{b}{2}&0\\ -\frac{b}{2}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\det(\bar{\bar{\varepsilon}} - \lambda\bar{\bar{I}}) = \begin{vmatrix}-\lambda&\frac{b}{2}&0\\ \frac{b}{2}&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{b}{2} \quad \varepsilon_2 = \frac{-b}{2} \quad \varepsilon_3 = 0$

Soit $\vec{y}_1 \begin{vmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{vmatrix}$ associé à $\varepsilon_1 = \frac{b}{2}$ $\Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}}_1 \cdot \vec{y}_1 = \varepsilon_1 \vec{y}_1$

$\begin{cases}\frac{b}{2} b_1 = \frac{b}{2} a_1\\ \frac{b}{2} a_1 = \frac{b}{2} b_1\\ 0 = \frac{b}{2} c_1\end{cases}$ $\quad a_1 = b_1 \quad \Rightarrow c_1 = 0$

$\vec{y}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$

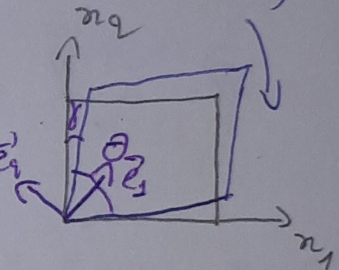
$\vec{y}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1)$

• soit $\vec{y}_2 \begin{vmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{vmatrix} \to \varepsilon_2 = \frac{-b}{2} \Rightarrow \begin{cases}\frac{b}{2} b_2 = \frac{-b}{2} a_2\\ \frac{b}{2} a_2 = \frac{-b}{2} b_2\\ 0 = -\frac{b}{2} c_2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a_2 = -b_2\\ c_2 = 0\end{cases} \qquad \vec{y}_3 = \vec{e}_3$

Dans la base principale $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$

$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix}\frac{b}{2}&0&0\\0&-\frac{b}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$



On a dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$\bar{\bar{\omega}} = \begin{pmatrix}0&\frac{b}{2}&0\\ \frac{-b}{2}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{-b}{2}\end{pmatrix}$

Rappel :

Si $\bar{\bar{A}}$ antisymétrique

$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix}0&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&0&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&0\end{pmatrix}$ $\qquad A_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk}$

$A_1 = \frac{-1}{2}\varepsilon_{123}A_{23} - \frac{1}{2}\varepsilon_{132}A_{32} = -\frac{1}{2}A_{23} + \frac{1}{2}A_{32} = A_{32}$

donc $\vec{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{b}{2}\end{pmatrix}$ $\qquad ? = \frac{b}{2}$ dans la base (y_1, y_2, y_3)

$\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2\,\vec{e}_1\,\bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{e}_2 = 2\,\varepsilon_{12} = b = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\tan\gamma = \frac{b}{1} = b \simeq \gamma$

Ex 9 :

$$\vec{u} = \begin{cases} U_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ U_2 = \alpha X_1 X_3 \\ U_3 = 0 \end{cases}$$

1) $dV = J \, dV_0$

$$\bar{\bar{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha X_3 & -\alpha X_2 \\ \alpha X_3 & 0 & \alpha X_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{H}} + \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha X_3 & -\alpha X_2 \\ \alpha X_3 & 1 & \alpha X_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \det(\bar{\bar{F}}) = 1 + \alpha^2 X_3^2$$

$$V = \iiint (1 + \alpha^2 X_3^2) \, dV_0 = V_0 + \alpha^2 \iiint X_3^2 \, dX_1 \, dX_2 \, dX_3$$

$$= V_0 + \alpha^2 \pi R_0^2 \times \frac{h_0^3}{3}$$

$$V = V_0 \left(1 + \alpha^2 \frac{h_0^2}{3}\right) \geq V_0$$

2) a) H.T.I $\Rightarrow |H_{ij}| \ll 1 \quad \forall \vec{X} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha X_1| \ll 1 \\ |\alpha X_2| \ll 1 \\ |\alpha X_3| \ll 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| \ll \frac{1}{|X_1|} \\ |\alpha| \ll \frac{1}{|X_2|} \\ |\alpha| \ll \frac{1}{|X_3|} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha| \ll \frac{1}{R_0} \\ |\alpha| \ll \frac{1}{R_0} \\ |\alpha| \ll \frac{1}{h_0} \end{cases} \Rightarrow |\alpha| \ll \min\left(\frac{1}{R_0}, \frac{1}{h_0}\right)$$

b) $$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} X_2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} X_1 \\ -\frac{\alpha}{2} X_2 & \frac{\alpha}{2} X_1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $dV = J \, dV_0$

$J = 1 + tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) = 1$

$V = V_0$

on a d'après 1) $V = V_0 \left(1 + \alpha^2 \frac{h_0^2}{3}\right)$ or si $|\alpha| \ll \frac{1}{h_0} \Rightarrow |\alpha h_0| \ll 1$

$\Rightarrow \boxed{V \simeq V_0}$

d) $\varepsilon(\vec{e}_3, M_0) = \vec{e}_3 \, \bar{\bar{\varepsilon}}(M_0) \, \vec{e}_3 = \varepsilon_{33} = 0$

pas de variation de longueur (//) (Ox_3)

e) soit $\vec{n}_0$ un vecteur unitaire // à une section $X_3 = cst$

$$\varepsilon(\vec{n}_0, M_0) = \vec{n}_0\, \bar{\bar{\varepsilon}}(M_0) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} n_{01} \\ n_{02} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-\alpha}{2} X_2 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} X_1 \\ \frac{-\alpha}{2} X_2 & \frac{\alpha}{2} X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{01} \\ n_{02} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ les sections $X_3 = cst$ ne se déforme pas dans son plan

Rappel

Déplacement du solide rigide dans le H.T.I

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{\omega}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{b}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{X} + \vec{b}(t)$$

On a $\vec{u} = -\alpha X_2 X_3 \vec{e}_1 + \alpha X_1 X_3 \vec{e}_2 = \alpha X_3 (-X_2 \vec{e}_1 + X_1 \vec{e}_2)$

$$= \underbrace{(\alpha X_3 \vec{e}_3)}_{\vec{\omega}(X_3, t)} \wedge \underbrace{(X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3)}_{\vec{X}}$$

chaque section $X_3 = cst$ subit un mvt de rotation de solide rigide d'angle $\omega(X_3, t) = \alpha(t)\, X_3$

pour $X_3 = 0 \Rightarrow \omega(0, t) = 0$

$X_3 = h_0 \Rightarrow \omega(h_0, t) = \alpha h_0 = \varphi_0 \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi_0}{h_0}$ [rad/m]

angle unitaire de torsion

ex 38

$$M_0 \begin{cases} R \\ \Theta \\ Z \end{cases} \longrightarrow M \begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta \\ z = Z + u(R) \end{cases}$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base cartésien fixe

$(\vec{e}_R, \vec{e}_\Theta, \vec{e}_Z)$ base cylindrique initial

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ Base cylindrique dans la configuration déformé

$$\begin{cases} \vec{e}_R = \cos\Theta\, \vec{e}_1 + \sin\Theta\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\Theta = -\sin\Theta\, \vec{e}_1 + \cos\Theta\, \vec{e}_2 \end{cases} \Big| \ \vec{e}_Z = \vec{e}_3$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \end{cases} \Big| \ \vec{e}_z = \vec{e}_3$$

comme $\theta = \Theta \Rightarrow \vec{e}_r = \vec{e}_R \,/\, \vec{e}_\theta = \vec{e}_\Theta$