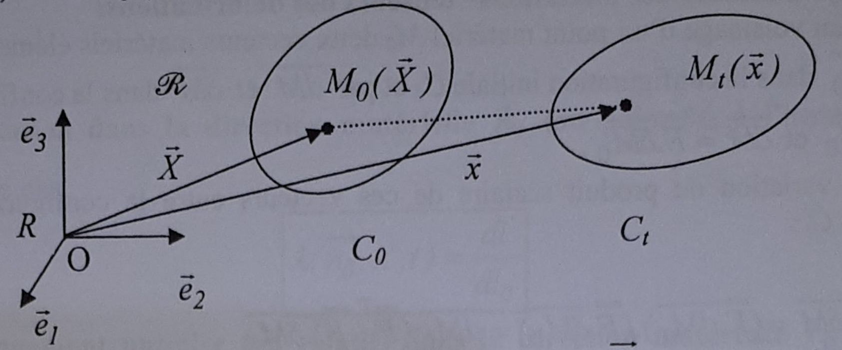
Chapitre 3 Etude des déformations

1. Transformation géométrique au voisinage d'un point matériel:

Etant donnés un milieu continu et une transformation $\vec{f}$ transformant les coordonnées d'un point matériel $\overrightarrow{X}$ (à $t=0$) en $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X},t)$ à l'instant t.



La transformation géométrique au voisinage du point matériel $\overrightarrow{X}$ est décrite à partir du tenseur gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}(\vec{X},t) = \overline{\overline{Grad}}(\vec{f})$ tel que pour tout vecteur matériel élémentaire $\overrightarrow{dX}$ dans C_0, on obtient son transporté $\overrightarrow{dx}$ dans la configuration C_t par la relation : $\boxed{\overrightarrow{dx} = \overline{\overline{F}}(\vec{X},t).\overrightarrow{dX}}$ (appelée formule de **transport convectif d'un vecteur matériel élémentaire**)

Avec $\boxed{F_{ij} = \partial f_i / \partial X_j = \dfrac{\partial x_i}{dX_j}}$ (composantes dans un repère cartésien orthonormé).

Pour un **volume matériel élémentaire** défini, au voisinage d'un point matériel $\overrightarrow{X}$, par dv_0 dans la configuration C_0 et par dv dans la configuration C_t, on obtient la formule de transport convectif suivante : $\boxed{dv = J\, dv_0}$ avec $\boxed{J(\vec{X},t) = det\left(\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)\right)}$

Pour une **surface élémentaire orientée**, entourant un point matériel $\overrightarrow{X}$, définie par $\overrightarrow{dS}_0 = dS_0\,\vec{n}_0$ dans la configuration C_0 et par $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$ dans la configuration C_t, on obtient la formule de transport convectif : $\boxed{dS\,\vec{n} = J\, dS_0 \left(\overline{\overline{F}}^T\right)^{-1} .\vec{n}_0}$

Transformations particulières :

- **Transformation homogène**

Une transformation est dite homogène si le tenseur $\overline{\overline{F}}$ est indépendant des coordonnées (X_1, X_2, X_3).
Les coordonnées (x_1, x_2, x_3) sont des fonctions affines des coordonnées (X_1, X_2, X_3) :

$$\boxed{\vec{x} = \overline{\overline{F}}(t).\overrightarrow{X} + \vec{b}(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{dx} = \overline{\overline{F}}(t).\overrightarrow{dX}}$$

Dans ce cas, les formules de transport convectif sont aussi valables pour des **quantités non élémentaires** : vecteur matériel, volume matériel et surface plane orientée.

- **Transformation de solide rigide ou rigidifiante**

C'est un cas particulier de transformations homogènes pour lequel le tenseur $\overline{\overline{F}}$ est orthogonal et se réduit à la rotation de solide rigide : $\boxed{\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}}(t)}$, $\boxed{\vec{x} = \overline{\overline{R}}(t).\vec{X} + \vec{b}(t)}$ avec $\boxed{\overline{\overline{R}}.\overline{\overline{R}}^T = \overline{\overline{I}}}$ et $\boxed{det(\overline{\overline{R}}) = 1}$

2. Etude des déformations:

On dit qu'un système matériel se déforme lors d'une transformation de milieu continu entre C_0 et C_t, lorsque cette transformation fait varier les distances entre les particules et / ou les angles entre les vecteurs matériels. Ces variations peuvent être caractérisées en étudiant les variations de produits scalaires de vecteurs élémentaires.

a) Tenseurs des dilatations– tenseurs des déformations:

Considérons au voisinage d'un point matériel M_0 deux vecteurs matériels élémentaires représentés par $\overrightarrow{dM_0}$ et $\overrightarrow{\delta M_0}$ dans la configuration initiale C_0 et par $\overrightarrow{dM}$ et $\overrightarrow{\delta M}$ dans la configuration C_t avec :

$\overrightarrow{dM} = \overline{\overline{F}}.\overrightarrow{dM_0}$ et $\overrightarrow{\delta M} = \overline{\overline{F}}.\overrightarrow{\delta M_0}$.

Calculons la variation du produit scalaire de ces vecteurs entre la configuration initiale C_0 et la configuration C_t :

- $\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} = (\overline{\overline{F}}.\overrightarrow{dM_0}).(\overline{\overline{F}}.\overrightarrow{\delta M_0}) = \overrightarrow{dM_0}.(\overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{F}}).\overrightarrow{\delta M_0}$

On pose $\boxed{\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} = \overrightarrow{dM_0}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{\delta M_0}}$ avec $\boxed{\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{F}}}$

- Variation du produit scalaire :

$\boxed{\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0} = 2\overrightarrow{dM_0}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{\delta M_0}}$ avec $\boxed{\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}})}$

Le tenseur symétrique $\overline{\overline{C}}$ est le **tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite.**

Le tenseur symétrique $\overline{\overline{E}}$ est le **tenseur des déformations** de **Green-Lagrange**

Remarques:

- Dans le cas d'une **transformation de solide rigide**, on a : $\boxed{\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{0}}}$

incompressible

- Dans un repère cartésien orthonormé et à partir des composantes du tenseur gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}$, on peut exprimer celles des tenseurs $\overline{\overline{C}}$, $\overline{\overline{E}}$:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \Rightarrow \boxed{C_{ij} = F^T_{ik}F_{kj} = F_{ki}F_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}} \qquad \boxed{E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)}$$

Détermination du tenseur des déformations de Green-Lagrange par la formule du ds^2 :

En posant $ds_0 = \left\|\overrightarrow{dM_0}\right\|$, $ds = \left\|\overrightarrow{dM}\right\|$, on a $ds_0^2 = \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{dM_0}$, $ds^2 = \overrightarrow{dM}.\overrightarrow{dM}$, et la formule du ds^2 :

$$\boxed{ds^2 - ds_0^2 = 2\,\overrightarrow{dM_0}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{dM_0} = 2\left[\overrightarrow{dM_0}\right]_i.\left[\overrightarrow{dM_0}\right]_j E_{ij}}$$

qui constitue une méthode très commode pour la détermination des composantes de $\overline{\overline{E}}$ dans un système de coordonnées curvilignes.

b) Interprétation géométrique:

- **Variation de longueurs:**

On considère au voisinage d'un point matériel $M_0(\vec{X})$, un vecteur matériel élémentaire défini par $\overrightarrow{dl_0} = dl_0.\vec{n}_0$ dans C_0 et par $\overrightarrow{dl} = dl.\vec{n}$ dans C_t ; avec $\overrightarrow{dl} = \overline{\overline{F}}.\overrightarrow{dl_0}$, $\|\vec{n}\| = \|\vec{n}_0\| = 1$, $dl = \|\overrightarrow{dl}\|$ et $dl_0 = \|\overrightarrow{dl_0}\|$.

Définitions :

- On appelle **dilatation dans la direction matérielle** $\vec{n}_0$ (au point M_0 à l'instant t) la quantité $\lambda(\vec{n}_0, \vec{X}, t)$ définie par :

$$\boxed{\lambda(\overrightarrow{n_0}, \vec{X}, t) = \frac{dl}{dl_0}}$$

- On appelle **allongement unitaire (ou relatif) dans la direction matérielle** $\vec{n}_0$ (au point M_0 à l'instant t) la quantité $\varepsilon(\vec{n}_0, \vec{X}, t)$ définie par :

$$\boxed{\varepsilon(\vec{n}_0, \vec{X}, t) = \frac{dl - dl_0}{dl_0}}$$

Propositions :

- La dilatation dans la direction $\vec{n}_0$ (au point M_0 à l'instant t) s'obtient à partir du tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite par la relation :

$$\boxed{\lambda(\overrightarrow{n_0}, \vec{X}, t) = \sqrt{\overrightarrow{n_0}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{n_0}}}$$

- L'allongement dans la direction matérielle $\vec{n}_0$ (au point M_0 à l'instant t) s'obtient à partir du tenseur des déformations de Green-Lagrange par la relation :

$$\boxed{\varepsilon(\vec{n}_0, \vec{X}, t) = \sqrt{1 + 2\vec{n}_0.\overline{\overline{E}}.\vec{n}_0} - 1}$$

<u>**Dém**</u> :

On a $(dl)^2 = \overrightarrow{dl}.\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dl_0}\,\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{dl_0} = (dl_0)^2\, \overrightarrow{n_0}\,\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{n_0} \Rightarrow \lambda(\overrightarrow{n_0}) = \frac{dl}{dl_0} = \sqrt{\overrightarrow{n_0}.\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{n_0}}$

Comme $\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}})$ alors $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{I}} + 2\,\overline{\overline{E}}$ et $dl = dl_0\sqrt{1 + 2\,\overrightarrow{n_0}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_0}}$ d'où le résultat recherché.#

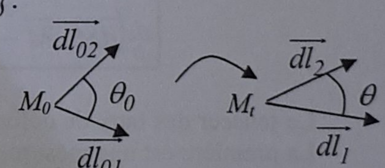
- **Variation d'angles:**

On considère au voisinage d'un point matériel $M_0(\vec{X})$, deux vecteurs matériels élémentaires définis respectivement par $\overrightarrow{dl_{01}}$ et $\overrightarrow{dl_{02}}$ dans C_0, et par $\overrightarrow{dl_1}$ et $\overrightarrow{dl_2}$ dans C_t ;

avec : $\overrightarrow{dl_{01}} = dl_{01}.\vec{n}_{01}$, $\overrightarrow{dl_{02}} = dl_{02}.\vec{n}_{02}$, $\overrightarrow{dl_1} = dl_1.\vec{n}_1$, $\overrightarrow{dl_2} = dl_2.\vec{n}_2$;

$\overrightarrow{dl_i} = \overline{\overline{F}}.\overrightarrow{dl_{0i}}$, $\|\vec{n}_i\| = \|\vec{n}_{0i}\| = 1$, $dl_i = \|\overrightarrow{dl_i}\|$ et $dl_{0i} = \|\overrightarrow{dl_{0i}}\|$ pour $i \in \{1,2\}$.

On désigne par θ_0 l'angle $(\vec{n}_{01}, \vec{n}_{02})$, et par θ l'angle $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.

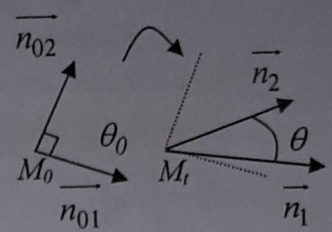


Proposition :

L'angle θ s'obtient à partir de l'angle θ_0 par :

$$\boxed{Cos(\theta) = \frac{2\vec{n}_{01}.\overline{\overline{E}}.\vec{n}_{02} + cos(\theta_0)}{\sqrt{1 + 2\,\overrightarrow{n_{01}}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1 + 2\,\overrightarrow{n_{02}}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}}}$$

Cas particulier :
Si $\vec{n}_{01} \perp \vec{n}_{02}$ $(\theta_0 = \pi/2)$, on appelle **glissement relatif à** $(\vec{n}_{01}, \vec{n}_{02})$ l'angle:



$$\boxed{\gamma(\vec{n}_{01}, \vec{n}_{02}) = \frac{\pi}{2} - \theta = Arc\sin\left(\frac{2.\vec{n}_{01}.\overline{\overline{E}}.\vec{n}_{02}}{\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{01}}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{02}}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}}\right)}$$

Dém : On a : $\overrightarrow{dl_1}.\overrightarrow{dl_2} = \left\|\overrightarrow{dl_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{dl_2}\right\|.\cos\theta = dl_1.dl_2.\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{dl_1}.\overrightarrow{dl_2}}{dl_1.dl_2} = \frac{\overrightarrow{dl_{01}}\,\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{dl_{02}}}{(dl_{01}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{01}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}).(dl_{02}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{02}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}})} = \frac{dl_{01}.dl_{02}\,\overrightarrow{n_{01}}\,\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{n_{02}}}{dl_{01}.dl_{02}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{01}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{02}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_{01}}\,\overline{\overline{C}}.\overrightarrow{n_{02}}}{\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{01}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{02}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}} = \frac{\overrightarrow{n_{01}}(\overline{\overline{I}}+2\,\overline{\overline{E}}).\overrightarrow{n_{02}}}{\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{01}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{02}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}} = \frac{\cos\theta_0 + 2\,\overrightarrow{n_{01}}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}{\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{01}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1+2\,\overrightarrow{n_{02}}\,\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}}$$

Pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta_0 = 0$. En posant $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ on a $\sin\gamma = \cos\theta$ d'où $\gamma = Arc\sin(\cos\theta)$.#

Remarque : Il y a conservation des angles $(\theta = \theta_0)$ au cours d'une transformation de milieu continu si et seulement si le champ des tenseurs de déformation de Green-Lagrange est sphérique: $\overline{\overline{E}} = E(\bar{X},t)\overline{\overline{I}}$.

c) Vitesse de déformation:

Proposition :
La dérivée particulaire du tenseur des déformations de Green-Lagrange s'obtient à partir du tenseur des taux de déformation par la relation :

$$\boxed{\dot{\overline{\overline{E}}} = \overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{D}}.\overline{\overline{F}}}$$

Preuve :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{F}}^T\overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}) \Rightarrow \dot{\overline{\overline{E}}} = \frac{1}{2}(\dot{\overline{\overline{F}}}^T\,\overline{\overline{F}} + \overline{\overline{F}}^T\,\dot{\overline{\overline{F}}}) = \frac{1}{2}\left((\overline{\overline{L}}\overline{\overline{F}})^T\overline{\overline{F}} + \overline{\overline{F}}^T(\overline{\overline{L}}\overline{\overline{F}})\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\overline{\overline{E}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{F}}^T\,\overline{\overline{L}}^T\,\overline{\overline{F}} + \overline{\overline{F}}^T\,\overline{\overline{L}}\overline{\overline{F}}\right) = \overline{\overline{F}}^T\left(\frac{\overline{\overline{L}}^T + \overline{\overline{L}}}{2}\right)\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{D}}.\overline{\overline{F}} \ \#$$

Proposition :
La dérivée particulaire de la variation du produit scalaire de deux vecteurs matériels élémentaires est donnée par la relation :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M}\right) = 2\overrightarrow{dM_0}.\dot{\overline{\overline{E}}}.\overrightarrow{\delta M_0} = 2\overrightarrow{dM}.\overline{\overline{D}}.\overrightarrow{\delta M}}$$

Le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ et le tenseur $\dot{\overline{\overline{E}}}$, sont des mesures de la vitesse de déformation. La première est une mesure eulérienne alors que la seconde est lagrangienne.

Preuve :

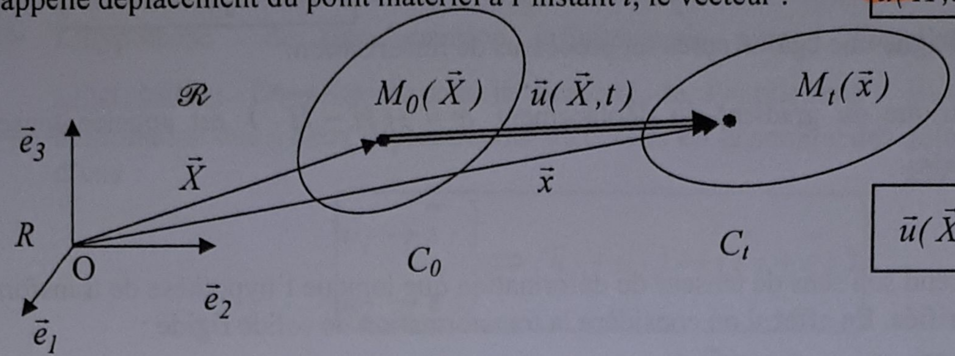
$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dM}.\overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0}.\overrightarrow{\delta M_0}\right) = \frac{d}{dt}\left(2\overrightarrow{dM_0}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{\delta M_0}\right) = 2\overrightarrow{dM_0}.\dot{\overline{\overline{E}}}.\overrightarrow{\delta M_0} \quad \text{(Première égalité)}$$

$$= 2\overrightarrow{dM_0}.\left(\overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{D}}.\overline{\overline{F}}\right).\overrightarrow{\delta M_0} = 2\left(\overline{\overline{F}}\,\overrightarrow{dM_0}\right)\overline{\overline{D}}.\left(\overline{\overline{F}}\,\overrightarrow{\delta M_0}\right) = 2\overrightarrow{dM}.\overline{\overline{D}}.\overrightarrow{\delta M} \quad \text{(deuxième égalité)} \ \#$$

3. Champs de déplacement:

On considère un point matériel repéré par ses coordonnées $\vec{X}$ dans la configuration initiale C_0 et $\vec{x}(\vec{X},t)$ dans la configuration C_t.

On appelle déplacement du point matériel à l'instant t, le vecteur : $\boxed{\vec{u}(\vec{X},t)=\vec{x}(\vec{X},t)-\vec{X}}$



$$\boxed{\vec{u}(\vec{X},t)=\overrightarrow{M_0M_t}=\overrightarrow{OM_t}-\overrightarrow{OM_0}}$$

On désigne par $\overline{\overline{H}}$ le tenseur gradient du déplacement tel que :

$$\overrightarrow{du}=\overline{\overline{H}}.\overrightarrow{dX}\ ,\quad \boxed{\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{Grad}}(\vec{u})}$$

Ses composantes dans un repère cartésien orthonormé sont données par : $\boxed{H_{ij}=\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}}$.

Comme $u_i=x_i-X_i$ alors $H_{ij}=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}-\delta_{ij}=F_{ij}-\delta_{ij}$ d'où $\boxed{\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{F}}-\overline{\overline{I}}}$.

Le tenseur $\overline{\overline{H}}$ peut être décomposé en une partie symétrique $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et une partie antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$ telles que :

$$\boxed{\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{\varepsilon}}+\overline{\overline{\omega}}}\ \text{avec}\ \boxed{\overline{\overline{\varepsilon}}=\tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}}+\overline{\overline{H}}^T)}\ \text{et}\ \boxed{\overline{\overline{\omega}}=\tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}}-\overline{\overline{H}}^T)}$$

Dans un repère cartésien orthonormé on obtient :

$$\boxed{\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)}\ \text{et}\ \boxed{\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}-\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)}$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$ s'obtient à partir du tenseur gradient du déplacement $\overline{\overline{H}}$ par : $\boxed{\overline{\overline{E}}=\tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}}+\overline{\overline{H}}^T)+\tfrac{1}{2}\overline{\overline{H}}^T\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{\varepsilon}}+\tfrac{1}{2}\overline{\overline{H}}^T\overline{\overline{H}}}$

Dans un repère cartésien orthonormé on obtient : $\boxed{E_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial X_i}\dfrac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)}$

$\overline{\overline{E}}$ est donc la somme d'une partie linéaire par rapport à $\overline{\overline{H}}$ et d'une partie quadratique en $\overline{\overline{H}}$.

4. Petite transformation, Petits déplacements, Petites perturbations:

a) Petite transformation ou transformation infinitésimale:

La transformation d'un milieu entre les configuration C_0 et C_t , dans un référentiel ℛ est dite infinitésimale si le champ de tenseur gradient du déplacement est tel que :

$$\boxed{\left\|\overline{\overline{H}}(\vec{X},t)\right\|<<1}\ \forall\vec{X}\in C_0$$

Dans ce cas les composantes du tenseur $\overline{\overline{H}}$ sont telles que:

$$\left|H_{ij}(\vec{X},t)\right|<<1\ \forall\vec{X}\in C_0\ \text{pour}\ i,j\in\{1,2,3\}.$$

Tenseur des déformations linéarisé :

Dans l'hypothèse de transformation infinitésimale, le tenseur de déformation de Green –Lagrange $\overline{\overline{E}}$ se réduit au tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ appelé tenseur des déformations linéarisé ($\overline{\overline{\varepsilon}}$ a été introduit comme la partie symétrique du gradient du déplacement $\overline{\overline{H}}$).

En effet l'hypothèse de transformation infinitésimale ($|H_{ij}| << 1$), permet de négliger dans l'expression de $\overline{\overline{E}}$, le terme $\overline{\overline{H}}^T\overline{\overline{H}}$ par rapport à $\overline{\overline{H}}$ et $\overline{\overline{H}}^T$:

$$\overline{\overline{E}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T + \overline{\overline{H}}^T\overline{\overline{H}}) \cong \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\overline{E}} \cong \overline{\overline{\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T)}.$$

Où le signe $'' \cong ''$ désigne une égalité après un processus de linéarisation.

La partie antisymétrique du gradient du déplacement $\overline{\overline{\omega}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T)$ est appelée <u>tenseur des rotations infinitésimales</u>.

<u>Remarque</u> :

- Le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ ne prend son sens de tenseur de déformation que lorsque l'hypothèse de transformation infinitésimale est vérifiée. En effet si on considère la transformation de solide rigide :

$$\vec{x} = \overline{\overline{R}}(t).\overrightarrow{X} + \vec{b}(t), \; \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}}(t), \; \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{I}} \Rightarrow \overline{\overline{E}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) = \overline{\overline{0}}$$

mais $\overline{\overline{\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T) = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{R}} + \overline{\overline{R}}^T) - \overline{\overline{I}} \neq \overline{\overline{0}}$.

- L'hypothèse de transformation infinitésimale entraîne celle des déformations infinitésimales mais la réciproque est fausse. Le cas de la transformation de solide rigide en est un contre-exemple.

<u>Conséquences de l'hypothèse de transformation infinitésimale</u> :

- Les déformations sont définies par <u>le tenseur des déformations linéarisé</u> $\overline{\overline{\varepsilon}}$.
- Le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ coïncide avec la dérivée particulaire du tenseur des déformations linéarisé $\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}$:

$$\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} \cong \dot{\overline{\overline{E}}} = \overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{D}}.\overline{\overline{F}} = (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}}^T).\overline{\overline{D}}.(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}}) = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{H}}^T.\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{D}}.\overline{\overline{H}} \cong \overline{\overline{D}} \rightarrow \boxed{\overline{\overline{D}} \cong \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}}$$

- Le tenseur des taux de rotation $\overline{\overline{W}}$ coïncide avec la dérivée particulaire du tenseur des rotations infinitésimales $\dot{\overline{\overline{\omega}}}$:

$$\overline{\overline{\omega}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T) = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{F}} - \overline{\overline{F}}^T) \qquad \rightarrow \dot{\overline{\overline{\omega}}} = \tfrac{1}{2}(\dot{\overline{\overline{F}}} - \dot{\overline{\overline{F}}}^T) = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{L}}.\overline{\overline{F}} - \overline{\overline{F}}^T.\overline{\overline{L}}^T)$$

$$\rightarrow \dot{\overline{\overline{\omega}}} = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\overline{L}}.(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}}) - (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}}^T).\overline{\overline{L}}^T\right)$$

$$\rightarrow \dot{\overline{\overline{\omega}}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{L}} - \overline{\overline{L}}^T) + \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{L}}.\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T.\overline{\overline{L}}^T)$$

$$\rightarrow \dot{\overline{\overline{\omega}}} \cong \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{L}} - \overline{\overline{L}}^T) = \overline{\overline{W}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\overline{\overline{W}} \cong \dot{\overline{\overline{\omega}}}}$$

- La dilatation volumique s'obtient par l'approximation suivante :

$$\boxed{J \cong 1 + trace(\overline{\overline{\varepsilon}}) = 1 + div(\vec{u})}$$

Dans H.T.I

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}} = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\omega}} \rightarrow$$

$$J = \det(\overline{\overline{F}}) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}+\omega_{12} & \varepsilon_{13}+\omega_{13} \\ \varepsilon_{21}+\omega_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}+\omega_{23} \\ \varepsilon_{31}+\omega_{31} & \varepsilon_{32}+\omega_{32} & 1+\varepsilon_{33} \end{vmatrix} \approx (1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33})$$

$$\rightarrow J \cong 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 1 + trace(\overline{\overline{\varepsilon}}) = 1 + div(\vec{u})$$

- Le terme $div(\vec{u})$ représente donc la dilatation volumique relative dans le cadre de l'hypothèse de transformation infinitésimale :

$$\boxed{\frac{(dv-dv_0)}{dv_0}=J-1\cong div(\vec{u})=trace(\overline{\overline{\varepsilon}})}$$

- L'hypothèse de transformation infinitésimale permet l'application du <u>principe de superposition</u>. En effet d'après la linéarité de l'application : $\vec{u}\rightarrow\overline{\overline{\varepsilon}}$, il résulte que la déformation due à deux déplacements successifs est la somme des déformations dues à chacun d'eux :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{u}_1\rightarrow\overline{\overline{\varepsilon}}_1\\ \vec{u}_2\rightarrow\overline{\overline{\varepsilon}}_2\end{array}\right\}\Rightarrow(\vec{u}_1+\vec{u}_2)\rightarrow(\overline{\overline{\varepsilon}}_1+\overline{\overline{\varepsilon}}_2)}$$

<u>Transformation homogène et infinitésimale</u> :

Dans le cas d'une transformation homogène et infinitésimale, le champ de déplacement est de la forme :

$$\boxed{\vec{u}(\vec{X},t)=\overline{\overline{\varepsilon}}(t).\vec{X}+\overline{\overline{\omega}}(t).\vec{X}+\vec{b}(t)}$$

Dans H.T.I et homogè

b) Petits déplacements:

On dit que la transformation d'un milieu entre les configuration C_0 et C_t, dans un référentiel $\mathcal{R}$ vérifie l'hypothèse des petits déplacements si le champ de déplacement est tel que :

$$\left\|\vec{u}(\vec{X},t)\right\| << L_0 \quad \forall\vec{X}\in C_0.$$

où L_0 est une longueur caractéristique du système matériel étudié.

Dans ce cas les composantes du champ de déplacement $\vec{u}$ sont telles que:

$$\left|u_i(\vec{X},t)\right| << L_0 \quad \forall\vec{X}\in C_0 \text{ pour } i\in\{1,2,3\}.$$

L'hypothèse des petits déplacements est justifiée en mécaniques des solides chaque fois que la configuration déformée C_t reste très voisine de la configuration initiale C_0.

<u>Conséquence de l'hypothèse des petits déplacements:</u>

Les configurations C_0 et C_t étant très proches, on peut confondre les coordonnées eulériennes (x_1,x_2,x_3) avec les coordonnées lagrangiennes (X_1,X_2,X_3), $(x_i\approx X_i)$. Les données du problème seront écrites sur la configuration initiale non déformée.

c) Hypothèses des petites perturbations (H. P. P.):

Les transformations et les déplacements subis par des matériaux solides tels que les métaux, sont considérés dans de nombreuses applications comme très faibles. Cette constatation a permis de développer, pour la résolution de tels problèmes, une approche simplifiée basée sur les hypothèses des petites perturbations.

<u>Les hypothèses des petites perturbations</u> supposent d'une part que la transformation est infinitésimale et d'autre part que les déplacements sont petits.

<u>Remarque</u> : Lors de l'étude des problèmes d'équilibre thermoélastique, ces hypothèses supposent aussi que l'écart de température par rapport à une température de référence est faible.

5. Interprétations géométriques dans l'hypothèse de transformation infinitésimale:

a) Allongement dans une direction matérielle $\vec{n}_0$:

$$\boxed{\varepsilon(\vec{n}_0,\vec{X},t)=\vec{n}_0.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_0}$$

Dém :

$$\varepsilon(\vec{n}_0)=\sqrt{1+2\vec{n}_0.\overline{\overline{E}}.\vec{n}_0}-1\cong\sqrt{1+2\vec{n}_0.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_0}-1\cong 1+\tfrac{1}{2}(2\vec{n}_0.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_0)-1=\vec{n}_0.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_0 \qquad \#$$

b) Glissement relatif à deux directions orthogonales $(\vec{n}_{01},\vec{n}_{02})$:

$$\boxed{\gamma(\vec{n}_{01},\vec{n}_{02})=2\ \vec{n}_{01}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_{02}}$$

Dém :

$$\gamma(\vec{n}_{01},\vec{n}_{02})=Arc\sin\left(\frac{2.\vec{n}_{01}.\overline{\overline{E}}.\vec{n}_{02}}{\sqrt{1+2\ \overrightarrow{n_{01}}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1+2\ \overrightarrow{n_{02}}.\overline{\overline{E}}.\overrightarrow{n_{02}}}}\right)\cong Arc\sin\left(\frac{2.\vec{n}_{01}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_{02}}{\sqrt{1+2\ \overrightarrow{n_{01}}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\overrightarrow{n_{01}}}\sqrt{1+2\ \overrightarrow{n_{02}}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\overrightarrow{n_{02}}}}\right)$$

$$\gamma(\vec{n}_{01},\vec{n}_{02})\cong Arc\sin\left(2.\vec{n}_{01}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_{02}\right)\cong 2.\vec{n}_{01}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n}_{02} \qquad \#$$

c) Composantes du tenseur des déformations linéarisé relatives à une base O. N. $(\vec{e}_i)$:

$\boxed{\varepsilon_{11}(\vec{X},t)=\vec{e}_1.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{e}_1=\varepsilon(\vec{e}_1)}$: Allongement dans la direction $\vec{e}_1$

$\boxed{2\varepsilon_{12}(\vec{X},t)=2\varepsilon_{21}(\vec{X},t)=2\vec{e}_1.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{e}_2=2\vec{e}_2.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{e}_1=\gamma(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}$: glissement relatif à $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

$\boxed{\varepsilon_{22}(\vec{X},t)=\varepsilon(\vec{e}_2)}$: Allongement dans la direction $\vec{e}_2$

$\boxed{2\varepsilon_{23}(\vec{X},t)=2\varepsilon_{32}(\vec{X},t)=\gamma(\vec{e}_2,\vec{e}_3)}$: glissement relatif à $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

$\boxed{\varepsilon_{33}(\vec{X},t)=\varepsilon(\vec{e}_3)}$: Allongement dans la direction $\vec{e}_3$

$\boxed{2\varepsilon_{13}(\vec{X},t)=2\varepsilon_{31}(\vec{X},t)=\gamma(\vec{e}_1,\vec{e}_3)}$: glissement relatif à $(\vec{e}_1,\vec{e}_3)$

6. Définitions relatives au tenseur des déformations linéarisé:

a) Directions principales des déformations –déformations principales:

Le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est symétrique, il possède un système orthonormé de vecteurs propres auxquels sont associées des valeurs propres réelles. Ces valeurs propres, notées ε_1, ε_2, ε_3, sont appelées déformations principales ou allongements principaux. Les directions associées aux vecteurs propres sont appelées directions principales des déformations, et la base constituée des vecteurs propres s'appelle base principale.

Dans la base principale, le tenseur des déformations linéarisé se met sous la forme :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}$$

b) Décomposition de $\overline{\overline{\varepsilon}}$ en partie sphérique et déviateur:

Le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ peut être décomposé en la somme d'un tenseur, dont les trois valeurs propres sont identiques, dit tenseur sphérique et d'un tenseur à trace nulle appelé déviateur :

$$\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \underbrace{\varepsilon_s.\overline{\overline{I}}}_{\substack{\text{partie sphérique}\\ \downarrow \\ \text{dilatation uniforme}}} + \underbrace{\overline{\overline{\varepsilon}}^d}_{\substack{\text{déviateur}\\ \downarrow \\ \text{distorsion sans changement de volume}}}}$$

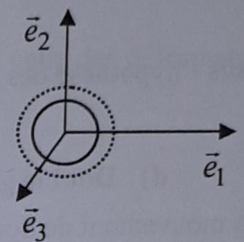
avec $\varepsilon_s = \frac{1}{3}trace(\overline{\overline{\varepsilon}}) = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$: déformation principale moyenne.

7. Etats de déformation particuliers :

a) Dilatation uniforme:

Un mouvement de dilatation uniforme est défini par la transformation : $\vec{x} = \lambda(t).\vec{X}$

Où λ est un scalaire positif.



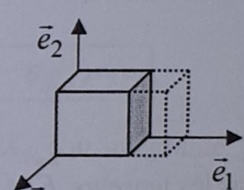
$$\begin{cases} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \lambda X_2 \\ x_3 = \lambda X_3 \end{cases} \Rightarrow \overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} ;$$

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{H}} \ ; \overline{\overline{\varpi}} = \overline{\overline{0}}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations ($\lambda \approx 1$) on obtient : $\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1).\overline{\overline{I}} \cong (\lambda - 1).\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{\varepsilon}}$

b) Extension simple:

Un mouvement d'extension simple dans la direction $\vec{e}_1$ est défini



par la transformation : $\begin{cases} x_1 = \lambda(t) X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$ Où λ est un scalaire positif.

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{H}} \ ; \overline{\overline{\varpi}} = \overline{\overline{0}}$$

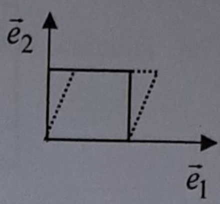
Dans l'hypothèse des petites perturbations ($\lambda \approx 1$) on obtient :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong (\lambda - 1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{\varepsilon}}$$

c) Glissement simple:

Un mouvement de glissement simple dans la direction $\vec{e}_1$ et dans le plan $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est défini par la transformation :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2\lambda(t)X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$



$$\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 0 \\ 2\lambda & 1+4\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \overline{\overline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

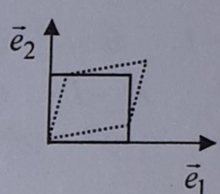
$$\overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \overline{\overline{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations ($|\lambda| << 1$) on obtient : $\overline{\overline{E}} \cong \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{\varepsilon}}$

d) Double glissement: [dans le plan $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$]

Un mouvement de double glissement dans le plan $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est défini par la transformation :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2\lambda_1(t)X_2 \\ x_2 = X_2 + 2\lambda_2(t)X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$



e) Déformation plane:

Un mouvement de déformation plane dans le plan $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est défini par :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Dans ce cas les tenseurs $\overline{\overline{F}}$ et $\overline{\overline{C}}$ sont de la forme : $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\overline{\overline{E}}$, $\overline{\overline{H}}$ et $\overline{\overline{\varepsilon}}$ sont de la forme : $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\overline{\overline{\omega}}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans la base principale $\overline{\overline{\varepsilon}}$ se met sous la forme : $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (la déformation principale $\varepsilon_3 = 0$)

8. Compatibilité des déformations dans l'hypothèse de transformation infinitésimale:

Connaissant le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{X},t)$, on peut calculer le champ de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{X},t)$ à partir des relations : $\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{Grad}}(\vec{u}) + \overline{\overline{Grad}}(\vec{u})^T)}$.

Réciproquement connaissant le champ de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{X},t)$ peut-on calculer le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{X},t)$?

On a $\overrightarrow{du} = \overline{\overline{Grad}}(\vec{u}).\overrightarrow{dX}$ soit en coordonnées cartésiennes :

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}.dX_j \qquad \text{ou encore :} \qquad \boxed{du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}).dX_j}$$

Pour calculer le déplacement u_i on doit intégrer la forme différentielle ci-dessus. Il apparaît donc un premier obstacle : les rotations ω_{ij} sont inconnues. La première étape consiste donc à calculer les rotations ω_{ij}.

a) Calcul des rotations:

On montre qu'il existe une relation entre les dérivées partielles des rotations et celle des déformations :

$$\boxed{\omega_{ij,l} = \varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i}}$$

<u>**Dém**</u> :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \Rightarrow \omega_{ij,l} = \frac{1}{2}(u_{i,jl} - u_{j,il})$$

$$\Rightarrow \omega_{ij,l} = \frac{1}{2}(u_{i,jl} + \underbrace{u_{l,ij} - u_{l,ij}}_{0} - u_{j,il})$$

$$\Rightarrow \omega_{ij,l} = \frac{1}{2}(u_{i,jl} + u_{l,ij}) - \frac{1}{2}(u_{l,ij} + u_{j,il})$$

$$\Rightarrow \omega_{ij,l} = \varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i} \qquad \#$$

Pour calculer les rotations ω_{ij}, on doit intégrer le système :

$$\boxed{d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_l} dX_l} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{d\omega_{ij} = (\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i}) dX_l}.$$

D'une manière générale pour qu'une équation de la forme : $dh = a_l.dX_l$ soit intégrable, il faut et il suffit que les conditions $a_{k,l} = a_{l,k}$ soient vérifiées.

Donc pour que le système $d\omega_{ij} = (\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i}) dX_l$ soit intégrable il faut et il suffit que :

$(\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i})_{,k} = (\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})_{,l}$

ou encore : $\boxed{\varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0}$

C'est une condition nécessaire et suffisante pour calculer les rotations. C'est donc une condition nécessaire pour le calcul du déplacement.

<u>**Cas particulier**</u> **: Transformation de solide rigide** $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{0}}$

On montre que si le champ de déformation est identiquement nul, alors le champ de déplacement est celui d'un solide rigide : $\boxed{\vec{u}(\vec{X},t) = \vec{\omega}^0(t) \wedge \vec{X} + \vec{b}(t)}$.

<u>Dém</u> : $\varepsilon_{ij} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{ij,l} = 0$

$\Rightarrow \qquad \omega_{ij} = \omega_{ij}^0(t)$ (Fonction uniquement du temps)

$$u_{i,j}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}=\omega_{ij}^{0} \quad \Rightarrow \quad du_i=\omega_{ij}^{0}.dX_j \quad \Rightarrow \quad u_i=\omega_{ij}^{0}.X_j+b_i(t)$$

soit en écriture vectorielle : $\vec{u}=\overline{\overline{\omega}}^{0}(t).\vec{X}+\vec{b}(t)$

ou encore en introduisant le vecteur dual de $\overline{\overline{\omega}}^{0}$: $\vec{u}=\vec{\omega}^{0}(t)\wedge\vec{X}+\vec{b}(t)$ #

b) Calcul du déplacement:

Supposons que la condition $\varepsilon_{il,jk}+\varepsilon_{jk,il}-\varepsilon_{jl,ik}-\varepsilon_{ik,jl}=0$ est vérifiée, on peut calculer les rotations ω_{ij}, à une constante ω_{ij}^{0} prés, par intégration du système : $d\omega_{ij}=(\varepsilon_{il,j}-\varepsilon_{jl,i})dX_l$.

Le déplacement u_i s'obtient, à un déplacement de solide rigide prés ($\omega_{ij}^{0}.X_j+b_i$), en intégrant la forme différentielle : $du_i=(\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}).dX_j$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces formes ($i=1,2,3$) soient intégrables est :

$$(\varepsilon_{ij}+\omega_{ij})_{,l}=(\varepsilon_{il}+\omega_{il})_{,j} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij,l}+\omega_{ij,l}=\varepsilon_{il,j}+\omega_{il,j}$$

En utilisant les relations : $\omega_{ij,l}=\varepsilon_{il,j}-\varepsilon_{jl,i}$ et $\omega_{il,j}=\varepsilon_{ij,l}-\varepsilon_{lj,i}$ on obtient :

$$\varepsilon_{ij,l}+\varepsilon_{il,j}-\varepsilon_{jl,i}=\varepsilon_{il,j}+\varepsilon_{ij,l}-\varepsilon_{\underset{\leftrightarrow}{lj},i} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij,l}+\varepsilon_{il,j}-\varepsilon_{jl,i}=\varepsilon_{il,j}+\varepsilon_{ij,l}-\varepsilon_{jl,i} \text{ puisque } \varepsilon_{jl}=\varepsilon_{lj}$$

Cette relation est automatiquement vérifiée. Les formes différentielles : $du_i=(\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}).dX_j$ peuvent être intégrées à un déplacement de solide rigide près.

c) Equations de compatibilité:

Pour que l'on puisse calculer le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{X},t)$ à partir d'un champ de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{X},t)$, il faut et il suffit que ce dernier vérifie les équations de compatibilité :

$$\boxed{\varepsilon_{il,jk}+\varepsilon_{jk,il}-\varepsilon_{jl,ik}-\varepsilon_{ik,jl}=0}$$

Dans cette expression les indices *(i,j,k,l)* varient de *1* à *3* ce qui donne *81* équations ; mais on constate que cette expression est :
- antisymétrique par rapport aux indices *i* et *j*,
- antisymétrique par rapport aux indices *k* et *l*,
- symétrique par rapport aux couples *(i,j)* et *(k,l)* ;

en plus pour *i=j* ou *k=l*, ces équations sont automatiquement vérifiées.

Il reste finalement 6 équations obtenues pour $(i,j,k,l)=\begin{cases}(1,2,1,2),(2,3,2,3),(3,1,3,1)\\(1,2,1,3),(2,3,2,1),(3,1,3,2)\end{cases}$

$$\begin{cases}\varepsilon_{12,21}+\varepsilon_{21,12}-\varepsilon_{22,11}-\varepsilon_{11,22}=0\\ \varepsilon_{23,32}+\varepsilon_{32,23}-\varepsilon_{33,22}-\varepsilon_{22,33}=0\\ \varepsilon_{31,13}+\varepsilon_{13,31}-\varepsilon_{11,33}-\varepsilon_{33,11}=0\end{cases} \quad \begin{cases}\varepsilon_{13,21}+\varepsilon_{21,13}-\varepsilon_{23,11}-\varepsilon_{11,23}=0\\ \varepsilon_{21,32}+\varepsilon_{32,21}-\varepsilon_{31,22}-\varepsilon_{22,31}=0\\ \varepsilon_{32,13}+\varepsilon_{13,32}-\varepsilon_{12,33}-\varepsilon_{33,12}=0\end{cases}$$

Ces six équations peuvent s'écrire sous la forme équivalent suivante, obtenue en faisant *j=k* et en remplaçant ensuite *l* par *j* :

$$\varepsilon_{ij,kk}+\varepsilon_{kk,ij}-\varepsilon_{kj,ik}-\varepsilon_{ik,kj}=0$$

qu'on peut écrire sous la forme : $\boxed{\Delta\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{kk,ij}-\varepsilon_{kj,ik}-\varepsilon_{ik,kj}=0}$

ou encore sous la forme intrinsèque suivante :

$$\boxed{\Delta\overline{\overline{\varepsilon}}+\overline{\overline{grad}}\left(\overrightarrow{grad}\left[tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right]\right)-\left(\overline{\overline{grad}}\left(div\left[\overline{\overline{\varepsilon}}\right]\right)+\overline{\overline{grad}}^{T}\left(div\left[\overline{\overline{\varepsilon}}\right]\right)\right)=\overline{\overline{0}}}$$