Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis **1ére A G M**

Mécanique des Milieux Continus
T.D. n°1

Exercice 1:

On considère le mouvement d'un fluide défini par les équations suivantes:

$$x = X + \alpha t.Y \qquad y = -\alpha t.X + Y \qquad z = Z$$

où (X,Y,Z) et (x,y,z) sont les coordonnées cartésiennes de la position d'un point matériel respectivemen à l'état initial ($t=0$) et à l'instant t. α est une constante donnée.

1. Déterminer le champ des tenseurs gradients de la transformation. Peut on dire que la transformatio est homogène ? Justifier la réponse.
2. Quelle est la nature des trajectoires des particules? Quelle est la vitesse d'une particule sur s trajectoire?
3. On considère les courbes matérielles constituées à $t=0$, dans le plan (x,y), par des droites. Qu deviennent ces courbes à l'instant t? Examiner le cas particulier des droites initialement passant pa l'origine.
4. On considère les courbes matérielles constituées à $t=0$, dans le plan (x,y), par des cercles. Qu deviennent ces courbes à l'instant t? Examiner le cas particulier des cercles initialement centrés l'origine.
5. Calculer les composantes de la vitesse des particules qui passent en un point de coordonnées $(x,y,z$ en fonction de ces coordonnées. Conclure sur la nature de l'écoulement.
6. Quelle est la nature des lignes de courant? (il est conseillé d'utiliser les coordonnées polaires).
7. Trouver l'équation de la ligne d'émission relative au point Q de coordonnées $(0,1,C)$ et l'instant T.

Exercice 2:

Le mouvement d'un milieu continu est donné par le champ des vitesses Eulérien suivant:

$$V_1 = 2\alpha x_1^2 x_2 \qquad V_2 = -2\alpha x_1 x_2^2 \qquad V_3 = 0$$

(x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes d'un point matériel à l'instant t, α est une constante.

1. Peut on dire que le mouvement est stationnaire ? Justifier la réponse.
2. Peut on dire que le mouvement est incompressible ? Justifier la réponse.
3. Déterminer le champ des tenseurs gradients des vitesses.
4. Déterminer le champ des tenseurs des taux de déformation et celui des taux de rotation.
5. Calculer l'accélération d'un point matériel en fonction des variables d'Euler.

6. Déterminer l'équation cartésienne et la nature des lignes de courant à un instant T.
7. On désigne par (X_1, X_2, X_3) les coordonnées cartésiennes d'un point matériel dans la configuration initiale (*t=0*). Montrer que pour un point matériel donné, le produit $(x_1.x_2)$ reste constant au cour du temps et égal à sa valeur initiale $(X_1.X_2)$.
8. Montrer que la position d'un point matériel (x_1, x_2, x_3) à l'instant *t*, s'obtient en fonction de sa position initiale et du temps par les relations :

$$x_1 = X_1 e^{2\alpha X_1 X_2 t}\ , \qquad x_2 = X_2 e^{-2\alpha X_1 X_2 t}\ , \qquad x_3 = X_3$$

9. Calculer l'accélération d'un point matériel en fonction des variables de Lagrange et vérifier que l'on retrouve le même résultat que celui de la question **5**.
10. Déterminer le champ des tenseurs gradients de la transformation. Peut on dire que la transformation est homogène ? Justifier la réponse.

Exercice 3:

Dans un repère (O, x_1, x_2, x_3), un fluide est animé d'un mouvement stationnaire. En chaque point, le vecteur vitesse $\vec{V}$ a pour composantes:

$$V_1 = -\frac{x_2}{r} h(r)\ ; \qquad V_2 = \frac{x_1}{r} h(r)\ ; \qquad V_3 = k(r) \qquad \text{avec } r^2 = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$$

1. Montrer que l'écoulement est nécessairement incompressible. Comment est la direction du vecteur vitesse $\vec{V}$ par rapport au vecteur radial $\overrightarrow{OM'}$ de composantes $(x_1, x_2, 0)$ dans le plan $x_3=0$?
2. Déterminer le champ des tenseurs gradients des vitesses.
3. Calculer l'accélération d'un point matériel en fonction des variables d'Euler.
4. Déterminer le champ des tenseurs des taux de déformation et celui des taux de rotation.
5. Déterminer les lignes de courant (il est fortement conseillé d'utiliser les coordonnées cylindriques).
6. Déterminer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} rot(\vec{V})$.
7. Comment choisir *h(r)* et *k(r)* pour que l'écoulement soit irrotationnel?
8. Comment choisir *h(r)* et *k(r)* pour que le vecteur tourbillon soit un vecteur constant colinéaire à Ox_3? Que devient *h(r)* si les vitesses restent finies le long de l'axe Ox_3?

M.M.C

ex 1 :

$$\begin{cases} x = X + \alpha t Y \\ y = -\alpha t X + Y \\ z = Z \end{cases}$$

1) $\overline{\overline{F}}(\vec{X},t) = \overline{\overline{\text{grad}}}\,(\vec{x}(X,t))$

$$[\overline{\overline{F}}] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ -\alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{F}}(t) \Rightarrow$ la trans est homogène

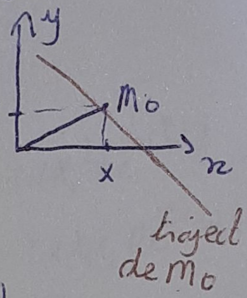
2) Trajectoire de la particule (X, Y, Z)

Eq paramétrées $/t$: $\begin{cases} x = X + \alpha t Y \\ y = -\alpha t X + Y \\ z = Z \end{cases}$

$\begin{cases} Xx + Yy = X^2 + Y^2 \\ z = Z \end{cases}$ eq cartésienne

Droite dans le plan $z = Z$ de vecteur directeur

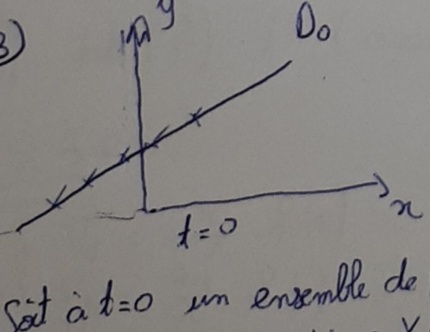
$\vec{d}\begin{vmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{OM_0}\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$



Vitesse de la particule (X, Y, Z)

$\vec{V}(\vec{X},t) = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} V_x = \alpha Y \\ V_y = -\alpha X \\ V_z = 0 \end{cases}$

3)



Soit à $t=0$ un ensemble de particules formant une droite D_0 : $Y = aX + b$

on a $\begin{cases} x = X + \alpha t Y & (1) \\ y = Y - \alpha t X & (2) \\ z = Z & (3) \end{cases}$

$$\begin{cases} X = \dfrac{x - \alpha t y}{1 + \alpha^2 t^2} \\ Y = \dfrac{\alpha t x + y}{1 + \alpha^2 t^2} \\ Z = z \end{cases}$$

une particule $(X, Y, Z) \in D_0 \Rightarrow$

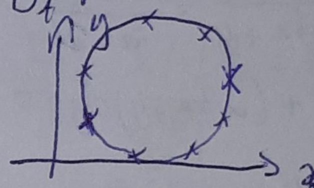
$$\frac{\alpha t x + y}{1 + \alpha^2 t^2} = a\left(\frac{x - \alpha t y}{1 + \alpha^2 t^2}\right) + b$$

$$(\alpha t - a)x + (1 + a\alpha t)y = \overbrace{b(1 + \alpha^2 t^2)}^{b'}$$

donc D_0 se transforme en une droite D_t

si initialement D_0 passe par l'origine alors D_t passe aussi par l'origine $(b' = 0)$

4)



Soit à $t=0$ un ensemble de particules formant un cercle $\mathcal{C}_0$: $(X-a)^2 + (Y-b)^2 = R^2$

une particule $(X, Y, Z) \Rightarrow$

$$\left(\frac{x - \alpha t y}{1 + \alpha^2 t^2} - a\right)^2 + \left(\frac{\alpha t x + y}{1 + \alpha^2 t^2} - b\right)^2 = R^2$$

$$[x - (a + b\alpha t)]^2 + [y - (b - a\alpha t)]^2 = R^2[1 + \alpha^2 t^2]$$

Si initialement $\mathcal{C}_0$ était centré en O $(a=0, b=0)$ alors $\mathcal{C}_1$ serait aussi centré en O $(a'=0, b'=0)$

5) $\vec{V}(\vec{x}, t) = ?$

on a $\begin{cases} V_x = \alpha Y \\ V_y = -\alpha X \\ V_z = 0 \end{cases}$ et comme $\vec{X} = \vec{g}(\vec{x}, t)$

$$\begin{cases} V_x(\vec{x},t) = \alpha\left(\dfrac{y+\alpha t x}{1+\alpha^2 t^2}\right) \\ V_y(\vec{x},t) = -\alpha\left(\dfrac{x-\alpha t y}{1+\alpha^2 t^2}\right) \\ V_z(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X + \alpha t Y \\ y = Y - \alpha t X \\ z = Z \end{cases}$$

Le mvt n'est pas stationnaire puisque $\dfrac{\partial \vec{V}(\vec{x},t)}{\partial t} \neq \vec{0}$

6) Lignes de courant à l'instant t

$$\frac{dx}{V_x(\vec{x},t)} = \frac{dy}{V_y(\vec{x},t)} = \frac{dz}{V_z(\vec{x},t)}$$

$$\vec{V} = \beta\, d\vec{x} \Rightarrow \begin{cases} V_x = \beta\, dx \\ V_y = \beta\, dy \\ V_z = \beta\, dz \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}}$$

$V_z = \beta\, dz \Rightarrow dz = 0$

$z = C$

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \Rightarrow \frac{dx}{\alpha t x + y} = \frac{-dy}{x - \alpha t y}$$

$$(x - \alpha t y)\,dx + (\alpha t x + y)\,dy = 0$$

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

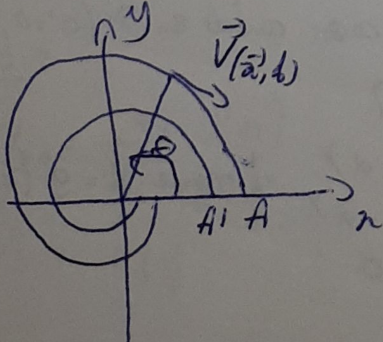
$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta$

$dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta$

$dr + \alpha t r\, d\theta = 0$

$$\frac{dr}{r} = -\alpha t\, d\theta \Rightarrow \boxed{r = A e^{-\alpha t \theta}}$$

spirale logarithmique



7) Ligne d'émission relative $(Q(0,1,C),T)$

On cherche la position à l'instant T des particule qui sont passé ou qui vont passer par le pt $Q(0,1,C)$ à un instant τ quelconque

Soit à un instant τ une particule qui se trouve au pt $Q(0,1,C)$

A $t=0$, cette particule se trouvent au pt

$$\vec{X}_\tau = \vec{g}(\vec{x}_Q, \tau)$$

$$\begin{cases} X_\tau = \dfrac{-\alpha\tau}{1+\alpha^2\tau^2} \\ Y_\tau = \dfrac{1}{1+\alpha^2\tau^2} \\ Z_\tau = C \end{cases}$$

à l'instant T cette même particule se trouve au pt $\vec{x}_T = \vec{f}(\vec{X}_\tau, T)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha T - \alpha\tau}{1+\alpha^2\tau^2} \\ y = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{x_1} = 2\alpha X_1X_2\,dt \\ \dfrac{dx_2}{x_2} = -2\alpha X_1X_2\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = Ae^{2\alpha X_1X_2 t} \\ x_2 = Be^{-2\alpha X_1X_2 t} \end{cases}$$

à $t=0$ on a $\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = X_1 e^{2\alpha X_1X_2 t} \\ x_2 = X_2 e^{-2\alpha X_1X_2 t} \\ x_3 = X_3 \end{cases}}$

Question supplémentaire :

trajectoire de la particule (X_1, X_2, X_3)

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{X_1X_2}{x_1} \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$ hyperbole dans le plan $x_3 = X_3$

9) $\vec{\gamma}(\vec{X}, t) = \dfrac{d^2\vec{x}(\vec{X}, t)}{dt^2}$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 4\alpha^2 X_1^3 X_2^2 e^{2\alpha X_1X_2 t} = 4\alpha^2 x_1^3 x_2^2 \\ \gamma_2 = 4\alpha^2 X_1^2 X_2^3 e^{-2\alpha X_1X_2 t} = 4\alpha^2 x_1^2 x_2^3 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

10) $\overline{\overline{F}} = ?$

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} (1+2\alpha X_1X_2 t)e^{2\alpha X_1X_2 t} & 2\alpha X_1^2 t e^{2\alpha X_1X_2 t} & 0 \\ -2\alpha X_2^2 t e^{-2\alpha X_1X_2 t} & (1-2\alpha X_1X_2 t)e^{-2\alpha X_1X_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{\overline{F}}$ dépend de X_1 et X_2 $\Rightarrow$ la transf n'est pas homogène

Q) $J = \det(\overline{\overline{F}}) = 1$ (mvt incompressible)

Ex 3 :

$$\begin{cases} V_1 = -\dfrac{x_2}{r} h(r) \\ V_2 = \dfrac{x_1}{r} h(r) \\ V_3 = k(r) \end{cases}$$

1) $\operatorname{div}(\vec{V}) = \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} + \underbrace{\dfrac{\partial V_3}{\partial x_3}}_{0}$

$= -x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{h(r)}{r}\right) + x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{h(r)}{r}\right)$

$= -x_2 \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{h(r)}{r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x_1} + x_1 \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{h(r)}{r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x_2}$

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow \dfrac{\partial r}{\partial x_1} = \dfrac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \dfrac{x_1}{r}$

$\dfrac{\partial r}{\partial x_2} = \dfrac{x_2}{r}$

$\operatorname{div}(\vec{V}) = -x_2 \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{h(r)}{r}\right)\dfrac{x_1}{r} + x_1 \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{h(r)}{r}\right)\dfrac{x_2}{r} = 0$

donc le mvt est incompressible

$$\left.\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{h(r)}{r}(-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2) + k(r)\vec{e}_3 \\ \vec{OM} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \vec{V} \perp \vec{OM}$$

2ème méthode

on pose $x_1 = r\cos\theta$ $\quad x_2 = r\sin\theta$

$\vec{V}(r, \theta, 3) = \underbrace{h(r)}_{V_\theta(r)}\vec{e}_\theta + \underbrace{k(r)}_{V_3(r)}\vec{e}_3$

$\operatorname{div}\vec{V} = \dfrac{V_r}{r} + V_{r,r} + \dfrac{V_{\theta,\theta}}{r} + V_{3,3} = 0$

2) $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\operatorname{grad}}}(\vec{V})$

$$[\overline{\overline{L}}] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{h(r)}{r} & 0 \\ h'(r) & 0 & 0 \\ k'(r) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h(r) \\ k(r) \end{pmatrix}$$

3) $\vec{\gamma}(M) = \underbrace{\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{0} + \underbrace{\overline{\overline{\operatorname{grad}}}(\vec{V})}_{\overline{\overline{L}}} \cdot \vec{V}$

$\gamma_r = \dfrac{-h^2(r)}{r}$

$\gamma_\theta = 0$

$\gamma_3 = 0$

ex 2 :

$$\begin{cases} V_1 = 2\alpha x_1^2 x_2 \\ V_2 = -2\alpha x_1 x_2^2 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

1) $\frac{\partial \vec{V}(\vec{x},t)}{\partial t} = \vec{0}$

Le mouvement est stationnaire

2) $div(\vec{V}) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$ u/gm

$= 4\alpha x_1 x_2 - 4\alpha x_1 x_2 = 0$

Le mouvement est incompressible

3) $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{grad}}(\vec{V})$

$$[\overline{L}] = \begin{pmatrix} 4\alpha x_1 x_2 & 2\alpha x_1^2 & 0 \\ -2\alpha x_2^2 & -4\alpha x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{W}}$

avec $\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{L}} + \overline{\overline{L}}^T)$ et $\overline{\overline{W}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{L}} - \overline{\overline{L}}^T)$

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} 4\alpha x_1 x_2 & \alpha(x_1^2 - x_2^2) & 0 \\ \alpha(x_1^2 - x_2^2) & -4\alpha x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{W}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(x_1^2 + x_2^2) & 0 \\ -\alpha(x_1^2 + x_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $\vec{\gamma}(\vec{x},t) = \frac{d\vec{V}(\vec{x},t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}(\vec{x},t)}{\partial t}}_{\vec{0}} + \overline{\overline{grad}}(\vec{V})\vec{V}$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha x_1 x_2 & 2\alpha x_1^2 & 0 \\ -2\alpha x_2^2 & -4\alpha x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha x_1^2 x_2 \\ -2\alpha x_1 x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(\vec{x},t) = 4\alpha^2 x_1^3 x_2^2 \\ \gamma_2(\vec{x},t) = 4\alpha^2 x_1^2 x_2^3 \\ \gamma_3(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

$\vec{\gamma}(\vec{x},t) = 4\alpha^2 x_1^2 x_2^2 \underbrace{(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2)}_{\lambda \vec{e}_r}$

6) Lignes de courant

$\boxed{\frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2}} = \frac{dx_3}{V_3} \Rightarrow \boxed{x_3 = C}$

$\frac{dx_1}{2\alpha x_1^2 x_2} = \frac{-dx_2}{2\alpha x_1 x_2^2}$

$x_2 dx_1 + x_1 dx_2 = 0 \Rightarrow d(x_1 x_2) = 0$

$\boxed{x_1 x_2 = A}$ hyperbole dans le plan $x_3 = C$

7) $\frac{d(x_1 x_2)}{dt} = \underbrace{\frac{dx_1}{dt}}_{V_1} x_2 + x_1 \underbrace{\frac{dx_2}{dt}}_{V_2} =$

$2\alpha x_1^2 x_2^2 - 2\alpha x_1^2 x_2^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 x_2 = cst \ \forall t$ or à $t = 0$

on a $\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \end{cases}$

8) $\boxed{\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}}$ à $t = 0$ $\boxed{\vec{x} = \vec{X}}$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2\alpha x_1 (x_1 x_2) & X_1 X_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2\alpha (x_1 x_2) x_2 & X_1 X_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 & \Rightarrow x_3 = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2\alpha X_1 X_2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2\alpha X_1 X_2 x_2 \end{cases}$$

5) $\vec{V} = \alpha\, d\vec{x}$

$\vec{x} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \Rightarrow d\vec{x} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$

$$\begin{cases} V_r = \alpha\, dr \\ V_\theta = \alpha\, r\, d\theta \\ V_z = \alpha\, dz \end{cases} \qquad \boxed{\frac{dr}{V_r} = \frac{r\,d\theta}{V_\theta} = \frac{dz}{V_z}}$$

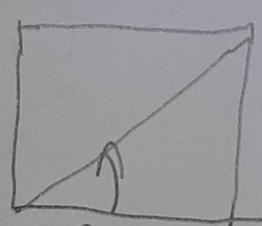
Dans notre cas $V_r = 0 \Rightarrow dr = 0 \Rightarrow \boxed{r = r_0}$

$$\frac{r\,d\theta}{V_\theta} = \frac{dz}{V_z} \Rightarrow \frac{r\,d\theta}{h(r)} = \frac{dz}{k(r)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dz = \dfrac{r\,k(r)}{h(r)}\, d\theta \\ r = r_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = r_0 \underbrace{\left(\frac{k(r_0)}{h(r_0)}\right)}_{tg(\beta)} \theta + z_0 \end{cases}$$

Hélice de rayon r_0 et d'angle d'inclinaison β $\quad tg(\beta) = \dfrac{k(r_0)}{h(r_0)}$



$2\pi r_0$

$z = r_0\, tg\,\beta\, \theta + z_0$

6) $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\, \vec{rot}(\vec{V}) = \frac{-k'(r)}{2}\vec{e}_\theta + \frac{1}{2r}\left(r h(r)\right)_{,r} \vec{e}_z$

7) $\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} k'(r) = 0 \\ (r\, h(r))' = 0 \end{cases}$

$k = cst$ et $h(r) = \dfrac{c}{r}$