Chapitre 2 Cinématique des milieux continus

1. Description du mouvement:

La description présentée dans ce chapitre se limite aux coordonnées cartésiennes orthonormées.

a) Description lagrangienne – Variables de Lagrange : (X_1, X_2, X_3, t)

Les coordonnées (X_1, X_2, X_3) introduites au chapitre précédant permettent d'identifier un point matériel dans la configuration de référence. Avec la description lagrangienne, toutes les inconnues du problème : coordonnées (x_1, x_2, x_3) de la position du point matériel à un instant t (relative à un référentiel et un repère donnés), vitesse, accélération, masse volumique, température, … s'écrivent en fonction des variables (X_1, X_2, X_3, t). Il s'agit donc de l'étude du mouvement et des propriétés d'un point matériel que l'on suit dans son mouvement.

Selon cette description, la vitesse et l'accélération d'un point matériel, à un instant t, sont définies par :

$$\boxed{\vec{V}(\vec{X},t) = \left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{\vec{X}\ fixé} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X},t)}{\partial t}} \qquad \boxed{\vec{\gamma}(\vec{X},t) = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{\vec{X}\ fixé} = \frac{\partial \vec{V}(\vec{X},t)}{\partial t}}$$

La dérivée $\dfrac{d}{dt}$ appelée dérivée particulaire, est définie comme la dérivée par rapport au temps en fixant le point matériel $\vec{X}$. C'est donc la dérivée partielle par rapport au temps ($\vec{X}$ étant fixé).

b) Description eulérienne – Variables d'Euler : (x_1, x_2, x_3, t)

Les variables (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées donnant la position du point matériel à l'instant t.

Contrairement à la description lagrangienne qui étudie le mouvement et les propriétés d'un point matériel particulier, la description eulérienne permet d'étudier le mouvement et les propriétés d'un milieu continu occupant une région spatiale sans s'intéresser à une particule matérielle déterminée.

Le mouvement est dans ce cas décrit par la donnée du champ des vitesses en chaque point :

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x},t).$$

Les deux descriptions sont équivalentes. En effet, à partir de la description lagrangienne on peut aboutir à la description eulérienne en remplaçant $\vec{X}$ par $\vec{g}(\vec{x},t)$. Inversement à partir d'une description eulérienne définie par le champ des vitesses $\vec{V}(\vec{x},t)$, il est possible d'aboutir à la description lagrangienne $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X},t)$ par intégration (sous réserve de certaines conditions de régularité de la fonction $\vec{V}$) du système différentiel :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}. \\ Condition\ Initiale : \left.\vec{x}\right|_{t=0} = \vec{X} \end{cases}}$$

La description eulérienne est bien adaptée à la mécanique des fluides ; elle permet d'étudier le mouvement et les propriétés du milieu, dans une région spatiale donnée, sans individualiser les particules matérielles, tandis que la description lagrangienne qui nécessite la connaissance d'une configuration de référence, est bien adaptée à l'étude de nombreux problèmes de mécanique des solides pour lesquels on connaît la configuration initiale du système.

c) Trajectoires – lignes de courant – lignes d'émission :

➢ **Trajectoires :**

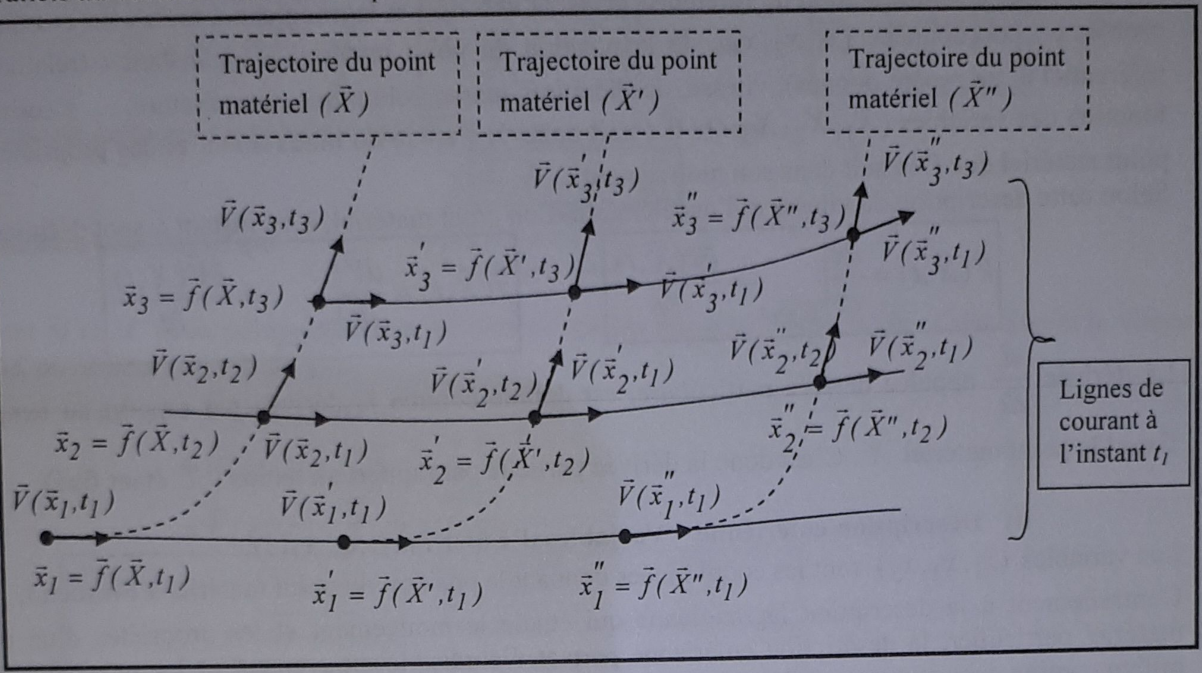
Dans un référentiel $\mathscr{R}$, un point matériel ($\vec{X}$) dont on suit le mouvement au cours du temps décrit une courbe appelée trajectoire. Cette trajectoire est donnée par les équations paramétrées par rapport au temps : $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X},t)$.

➢ **Lignes de courant :**

A un instant T donné, les lignes de courant, dans un référentiel $\mathscr{R}$, sont les lignes enveloppes du champs des vecteurs vitesses $\vec{V}$. Elles s'obtiennent en intégrant le système différentiel suivant :

$$\boxed{\frac{dx_1}{V_1(x_1,x_2,x_3,T)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1,x_2,x_3,T)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1,x_2,x_3,T)}}$$

Une ligne de courant à un instant T est une courbe qui admet en chacun de ses points une tangente parallèle au vecteur vitesse en ce point et à cet instant.

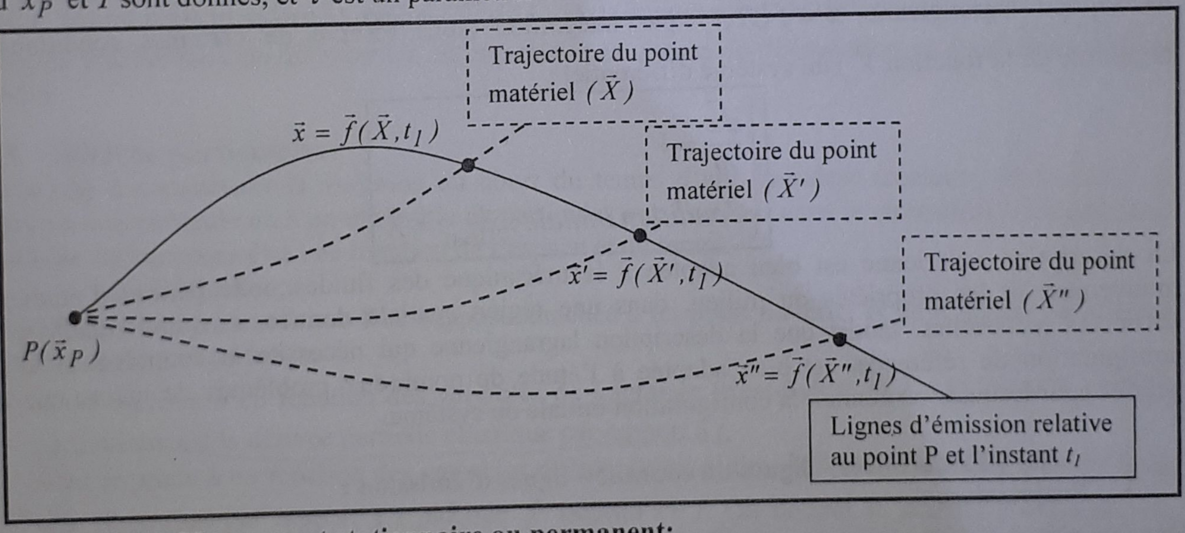


➢ **Lignes d'émission :**

Dans un référentiel $\mathscr{R}$, une ligne d'émission relative à un point P de coordonnées $\vec{x}_P(x_{1P},x_{2P},x_{3P})$ et un instant T fixé, est l'ensemble des positions $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ à l'instant T des particules qui sont passées ou qui passeront par le point P à un instant τ quelconque.

Elle est définie par l'équation suivante : $\boxed{\vec{x} = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}_p,\tau),T)}$

Où $\vec{x}_P$ et T sont donnés, et τ est un paramètre.



d) Mouvement stationnaire ou permanent:

Le mouvement est dit stationnaire (ou permanent) dans un référentiel $\mathscr{R}$ si et seulement si le champ des vitesses exprimé en variables eulériennes est indépendant du temps ($\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$). On montre que pour un tel mouvement, toutes les grandeurs caractérisant l'état du milieu, exprimées à l'aide des variables d'Euler, sont indépendantes du temps : toutes leurs dérivées partielles par rapport à t sont nulles.
Dans ce cas les lignes de courant sont fixes et coïncident avec les trajectoires et les lignes d'émission.

2. Mouvement au voisinage d'un point matériel :

En description eulérienne, le mouvement au voisinage d'un point matériel est décrit par le tenseur gradient des vitesses $\overline{\overline{L}}$ défini par :

$$\boxed{d\vec{V}(\vec{x}) = \overline{\overline{L}}.\overrightarrow{dx}} \qquad \boxed{\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{grad}}(\vec{V})} \qquad \boxed{L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = V_{i,j}}$$

Le tenseur $\overline{\overline{L}}$ peut être décomposé en partie symétrique $\overline{\overline{D}}$ et partie antisymétrique $\overline{\overline{W}}$:

$$\boxed{\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{W}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{L}} + \overline{\overline{L}}^T\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{\overline{W}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{L}} - \overline{\overline{L}}^T\right)}$$

On associe au tenseur antisymétrique $\overline{\overline{W}}$ le vecteur dual $\vec{\Omega}$ tel que :

$$\boxed{\overline{\overline{W}}.\overrightarrow{dx} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dx}}.$$

On montre dans ce cas que :

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec{V})}.$$

Soient M et M' deux points matériels infiniment voisins tels que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dx}$. Connaissant la vitesse de M, on obtient celle de M' par :

$$\begin{aligned}\vec{V}(M',t) &= \vec{V}(M,t) + d\vec{V}\\ &= \vec{V}(M,t) + \overline{\overline{L}}.\overrightarrow{dx}\\ &= \vec{V}(M,t) + \overline{\overline{W}}.\overrightarrow{dx} + \overline{\overline{D}}.\overrightarrow{dx}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{V}(M',t) = \underbrace{\underbrace{\vec{V}(M,t)}_{M^{vt}\,de\,Translation} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'}}_{M^{vt}\,de\,Rotation}}_{M^{vt}\,rigidifiant} + \underbrace{\overline{\overline{D}}.\overrightarrow{dx}}_{M^{vt}\,de\,déformation}}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}$ (dépendant de M et de t), appelé vecteur tourbillon et le tenseur $\overline{\overline{W}}$ appelé tenseur taux de rotation caractérisent le mouvement de rotation de solide rigide au voisinage du point matériel M. Si le mouvement au voisinage du point matériel est un mouvement de solide rigide, alors le terme $(\overline{\overline{D}}.\overrightarrow{dx})$ doit être nul pour tout $\overrightarrow{dx}$. Le tenseur $\overline{\overline{D}}$ est donc nul dans le cas d'un mouvement rigidifiant.

Le mouvement correspondant au terme $(\overline{\overline{D}}.\overrightarrow{dx})$ est un mouvement de déformation, et le tenseur $\overline{\overline{D}}$ est appelé tenseur taux de déformation. Il caractérise la vitesse de déformation au voisinage du point matériel.

3. Dérivée particulaire:

On cherche à caractériser la variation au court du temps d'une grandeur (scalaire, vectorielle …) attachée à une particule ou à un ensemble de particules que l'on suit dans le mouvement. La grandeur considérée est supposée être une fonction de l'espace et du temps.

a) Définition :

Considérons une grandeur h que l'on suppose attachée à un point matériel et dont on veut étudier la variation par rapport au temps.

- si on exprime h en fonction des variables de Lagrange (c'est-à-dire $h(\vec{X},t)$), alors la dérivée particulaire est la dérivée partielle classique par rapport à t.
- si on exprime h en fonction des variables d'Euler (c'est-à-dire $h(\vec{x},t)$), il ne suffit plus de faire une dérivation par rapport à t puisque $\vec{x}$ dépend de t. On obtient la dérivée particulaire en effectuant la dérivation composée de h par rapport à t par l'intermédiaire des variables $\vec{x}$ et t:

$$\boxed{\dot{h}(\vec{x},t) = \frac{dh(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(h).\vec{V}(\vec{x},t)}.$$

Cas particulier :

Si $h=J$ (Jacobien de la transformation $\vec{x}=\vec{f}(\vec{X},t)$), on montre que : $\boxed{\dot{J}=\frac{dJ}{dt}=J\,div(\vec{V})}$

Preuve :

$$J=\det(\overline{\overline{F}})=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}F_{il}F_{jm}F_{kn}$$

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\left(\dot{F}_{il}F_{jm}F_{kn}+F_{il}\dot{F}_{jm}F_{kn}+F_{il}F_{jm}\dot{F}_{kn}\right)$$

or $F_{ij}=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$ $\Rightarrow \dot{F}_{ij}=\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}=\dfrac{\partial}{\partial X_j}\dfrac{\partial x_i}{\partial t}$ $\Rightarrow \dot{F}_{ij}=\dfrac{\partial V_i}{\partial X_j}=\dfrac{\partial V_i}{\partial x_k}\dfrac{\partial x_k}{\partial X_j}$

$\Rightarrow \dot{F}_{ij}=V_{i,k}F_{kj}=L_{ik}F_{kj}$ d'où $\boxed{\dot{\overline{\overline{F}}}=\overline{\overline{L}}\,\overline{\overline{F}}}$

$\dot{F}_{il}=V_{i,p}F_{pl}$ $\dot{F}_{jm}=V_{j,q}F_{qm}$ $\dot{F}_{kn}=V_{k,r}F_{rn}$

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\left(V_{i,p}\underbrace{\varepsilon_{lmn}F_{pl}F_{jm}F_{kn}}_{J\,\varepsilon_{pjk}}+V_{j,q}\underbrace{\varepsilon_{lmn}F_{il}F_{qm}F_{kn}}_{J\,\varepsilon_{iqk}}+V_{k,r}\underbrace{\varepsilon_{lmn}F_{il}F_{jm}F_{rn}}_{J\,\varepsilon_{ijr}}\right)$$

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{1}{6}J\left(V_{i,p}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk}+V_{j,q}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqk}+V_{k,r}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijr}\right)$$

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{1}{6}J\left(2\delta_{ip}V_{i,p}+2\delta_{jq}V_{j,q}+2\delta_{kr}V_{k,r}\right)=\frac{1}{6}J\left(2V_{i,i}+2V_{j,j}+2V_{k,k}\right)=J\,V_{i,i}=J\,div(\vec{V})\quad \#$$

b) Dérivée particulaire d'une fonction vectorielle :

$$\boxed{\frac{d\vec{F}(\vec{x},t)}{dt}=\frac{\partial\vec{F}(\vec{x},t)}{\partial t}+\overline{\overline{grad}}(\vec{F}).\vec{V}(\vec{x},t)}$$

Cas particulier :

Si $\vec{F}=\vec{V}(\vec{x},t)$: vitesse du point matériel occupant la position $\vec{x}$ à l'instant t, on obtient son accélération par :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\gamma}(\vec{x},t)=\frac{d\vec{V}(\vec{x},t)}{dt}&=\frac{\partial\vec{V}(\vec{x},t)}{\partial t}+\overline{\overline{grad}}(\vec{V}).\vec{V}(\vec{x},t)\\&=\frac{\partial\vec{V}(\vec{x},t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\overrightarrow{grad}(V^2)+\overrightarrow{rot}(\vec{V})\wedge\vec{V}\end{aligned}}$$

c) Dérivée particulaire d'une intégrale de volume:

Soit D un domaine matériel de frontière ∂D et $\vec{n}$ le champ des normales à ∂D, unitaires et orientées vers l'extérieur de D.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_D h(\vec{x},t)\,dv&=\int_D \frac{dh}{dt}+h\,div(\vec{V})\,dv\\&=\int_D\left(\frac{\partial h}{\partial t}+div(h\vec{V})\right)dv\\&=\underbrace{\int_D\frac{\partial h}{\partial t}\,dv}_{\text{dû à la variation de } h\,\%\,t}+\underbrace{\int_{\partial D}h\vec{V}.\vec{n}\,dS}_{\substack{\text{dû à la variation de } D\,\%\,t\\ \text{(terme de convection)}}}\end{aligned}}$$

Les relations précédentes supposent la continuité de h et $\vec{V}$, et l'existence de leurs dérivées partielles.

Preuve :
Pour démontrer les égalités précédentes on choisit de passer par la description Lagrangienne. Soit D_0 la position du domaine D dans sa configuration initiale. D'après la formule de transport d'un élément de volume on a $dv = J\, dv_0$.

On pose $h(\vec{x},t) = H(\vec{X},t)$.

Dans ces conditions on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\int_D h(\vec{x},t)\; dv = \frac{d}{dt}\int_{D_0} H(\vec{X},t)\, J\, dv_0 = \int_{D_0} \frac{d}{dt}\big(H(\vec{X},t)\, J\big) dv_0$$

$$= \int_{D_0} \frac{dH}{dt} J + H\frac{dJ}{dt} dv_0 = \int_{D_0} \frac{dH}{dt} J + H\, J\, div(\vec{V})\, dv_0 = \int_{D_0} \left(\frac{dH}{dt} + H\, div(\vec{V})\right) J\, dv_0$$

Par retour à la description Eulérienne, on obtient la première égalité :

$$\frac{d}{dt}\int_D h(\vec{x},t)\; dv = \int_D \frac{dh}{dt} + h\, div(\vec{V})\; dv$$

On obtient la deuxième égalité en utilisant la dérivé particulaire de h : $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(h).\vec{V}$

et en remarquant que $\overrightarrow{grad}(h).\vec{V} + h\, div(\vec{V}) = div(h\vec{V})$

On obtient la troisième égalité en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_D div(h\vec{V})\; dv = \int_{\partial D} h\vec{V}.\vec{n}\; dS$$

#

Cas particulier :
Si $h = 1$, par application des formules précédentes, on obtient le taux de variation d'un volume matériel $v(D,t)$:

$$\boxed{v(D,t) = \int_D dv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \int_D div(\vec{V})dv = \int_{\partial D} \vec{V}.\vec{n}\, dS}$$

La quantité $div(\vec{V})$ représente localement le taux de variation volumique. Le mouvement est dit incompressible ou isochore si $div(\vec{V}) = 0$. Dans ce cas le volume de tout domaine matériel reste constant.

d) Dérivée particulaire d'une intégrale de surface:

(ou du flux d'un champ de vecteur à travers une surface)

Soit S une surface matérielle de normale unitaire $\vec{n}$ et Φ le flux d'un champ de vecteur $\vec{F}$ à travers S : $\Phi = \int_S \vec{F}(\vec{x},t).\vec{n}\, dS$

On a : $$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{F}(\vec{x},t).\vec{n}\, dS = \int_S \left(\frac{d\vec{F}}{dt} + \vec{F}.div(\vec{V}) - \overline{\overline{L}}.\vec{F}\right).\vec{n}\, dS}$$

La relation précédente suppose la continuité de $\vec{F}$ et $\vec{V}$, et l'existence de leurs dérivées partielles.

La démonstration de cette égalité se fait de la même façon que celle de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume c'est-à-dire en passant par la configuration initiale.

4. Principe de conservation de la masse:

Soit D un domaine quelconque de masse volumique ρ, la masse de ce domaine à un instant t est donnée par : $$m(D,t) = \int_D \rho \, dv$$

Le principe de conservation de la masse (P. C. M.) postule que la masse d'un domaine matériel quelconque que l'on suit au cours du temps, reste constante :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\int_D \rho \, dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) \; dv = 0}$$: Equation globale de conservation de la masse.

Comme le domaine D est quelconque (On aurai pu appliquer ce principe à un sous domaine quelconque d inclus dans D), l'utilisation du théorème de l'intégrale nulle permet d'obtenir l'équation locale de conservation de la masse dite **équation de continuité** :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div(\vec{V}) = 0}$$

Cette équation est l'une des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus. Elle peut aussi être obtenue en appliquant la dérivée particulaire à l'équation : $\rho J = \rho_0$.

<u>Remarque</u> : Dérivée particulaire d'une intégrale de volume où ρ est en facteur

En utilisant l'équation de continuité, on montre que : $$\boxed{\frac{d}{dt}\int_D \rho \, h \, dv = \int_D \rho \frac{dh}{dt} dv}$$

<u>Preuve :</u>

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho \, h \, dv = \int_D \frac{d(\rho h)}{dt} + (\rho h) div(\vec{V}) \; dv = \int_D \rho \frac{dh}{dt} + h \frac{d\rho}{dt} + h\rho \, div(\vec{V}) \; dv$$

$$= \int_D \rho \frac{dh}{dt} + h \left(\underbrace{\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div(\vec{V})}_{0} \right) dv = \int_D \rho \frac{dh}{dt} \, dv$$

#

- **Cas d'un milieu incompressible:**

Un milieu continu est dit incompressible si la masse volumique en chacun de ses points et à chaque instant reste constante et égale à sa valeur initiale : $\boxed{\rho = \rho_0(\vec{X})}$ et $\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0}$.

Dans ce cas l'équation de continuité donne : $\boxed{div(\vec{V}) = 0}$ et on a aussi $\boxed{J = 1}$

- **Cas d'un mouvement incompressible ou isochore:**

Il peut arriver, dans des cas très particuliers et dans des conditions spéciales, qu'un milieu compressible soit animé d'un mouvement pour lequel la relation $div(\vec{V}) = 0$ ait lieu en tout point et à chaque instant. Un tel mouvement est dit incompressible ou isochore et on a les relations suivantes :

$\boxed{dv = dv_0}$, $\boxed{J = 1}$, $\boxed{\rho = \rho_0(\vec{X})}$ (chaque particule garde sa masse volumique constante)

- **Cas d'un mouvement stationnaire:**

Dans le cas d'un mouvement stationnaire ($\partial / \partial t = 0$ pour toutes les grandeurs exprimées à l'aide des variables d'Euler), l'équation de continuité devient :

$$\boxed{div(\rho \vec{V}) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\rho \, div(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(\rho).\vec{V} = 0}$$