Chapitre 1 Généralités – Hypothèses de continuité

1. Notions de référentiel et de repère :

Pour décrire le mouvement d'un milieu continu, on introduit la notion de référentiel qui est liée à celle de l'observateur.

On suppose choisie une fois pour toute, l'échelle du temps, qui est valable pour tous les observateurs.

On appelle référentiel $\mathscr{R}$, l'ensemble des points de l'espace affine $\mathscr{P}_3$, animés du mouvement de corps rigide de l'observateur. On dit que le référentiel $\mathscr{R}$ est lié à l'observateur.

La mécanique classique postule l'existence d'un référentiel absolu, ou galiléen, doté de certaines propriétés sur lesquelles on reviendra au chapitre dynamique des milieux continus.

Pour repérer la position d'un point du milieu étudié, dans un référentiel $\mathscr{R}$, on utilise un repère R (le plus souvent orthonormé, mais sans que cela soit une nécessité). Ce repère est animé du mouvement de corps rigide du référentiel $\mathscr{R}$.

2. Hypothèse du milieu continu:

L'examen des propriétés d'un milieu, qu'il soit solide ou fluide, montre que ces dernières ne sont pas uniformément distribuées. La distribution apparaît d'autant moins uniforme que l'échelle d'examen est plus petite.

La mécanique des milieux continus s'intéresse au comportement de la matière à une échelle grande devant les distances intermoléculaires. Elle suppose que la matière est répartie sur tout le domaine qu'elle occupe.

D'où l'hypothèse du milieu continu : Un milieu continu est un milieu dont le comportement macroscopique peut être schématisé en supposant la matière répartie sur tout le domaine qu'il occupe.

3. Notion de point matériel - Configurations du système:

La modélisation du milieu continu suppose que le milieu est constitué d'un ensemble de particules macroscopiques ou points matériels, chaque point matériel représente la quantité de matière contenue dans un volume élémentaire. A chaque instant la position de chaque point matériel est assimilée à un point géométrique (centre du volume élémentaire) de l'espace affine $\mathscr{P}_3$. L'ensemble de ces positions définit la configuration du système à l'instant t notée C_t.

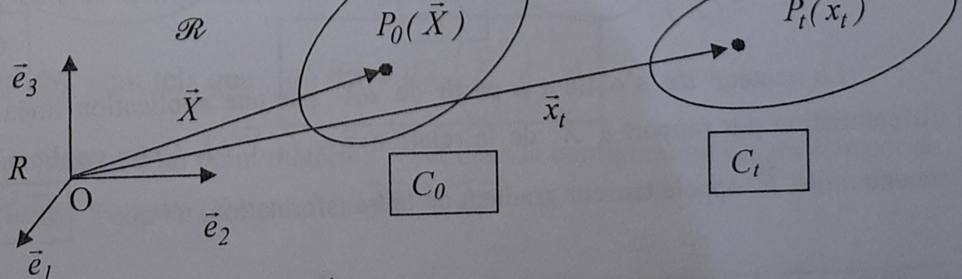
Pour pouvoir considérer que les différentes configurations représentent le même système matériel constitué des mêmes points matériels, il faut être en mesure de mettre en correspondance biunivoque les configurations de ce système entre deux instants différents. Pour cela il suffit d'être en mesure d'établir cette correspondance entre une configuration particulière C_{t0} prise comme configuration de référence et toute autre configuration. La configuration de référence permet d'identifier chaque point matériel par sa position dans cette configuration. Sauf mention du contraire on prendra $t_0=0$ et la configuration de référence C_0 pourra être appelée configuration initiale.

A chaque point matériel sont associées dans C_0 et dans un repère $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de $\mathscr{R}$, des coordonnées (X_1,X_2,X_3).

A ce même point matériel sont associées dans la configuration C_t des coordonnées (x_1,x_2,x_3), donnant sa position à l'instant t.

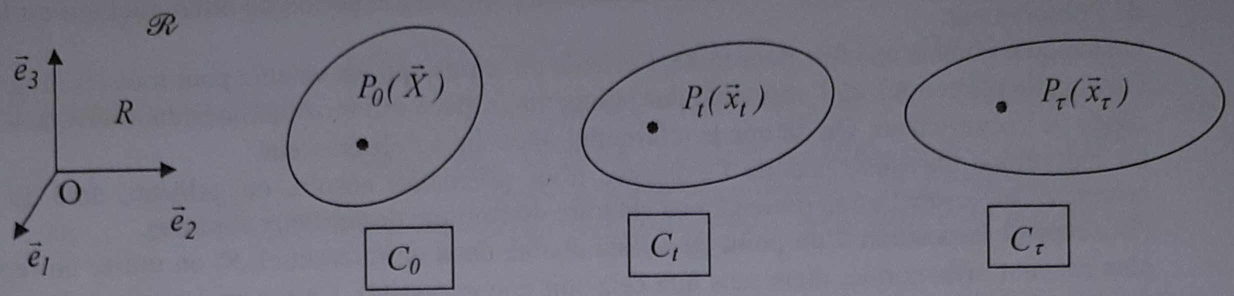
Les coordonnées (X_1,X_2,X_3) sont appelées coordonnées de Lagrange et C_0 est appelée configuration de Lagrange ou configuration Lagrangienne.

Les coordonnées (x_1,x_2,x_3) sont appelées coordonnées d'Euler et C_t est appelée configuration d'Euler ou configuration Eulérienne.



La correspondance biunivoque entre toute configuration C_t et la configuration initiale C_0 se fait par la donnée d'une famille d'applications bijectives $\vec{f}_t$ appelées **transformations** telles que :

$\forall t, \exists \vec{f}_t$ bijective / $\forall \vec{X} \in C_0 \; \exists \; \vec{x}_t \in C_t$ vérifiant $\vec{x}_t = \vec{f}_t(\vec{X})$.



Soit $\vec{g}_t$ l'application inverse de $\vec{f}_t$ et C_τ la configuration du système à un instant τ. La correspondance entre les configurations C_t et C_τ s'obtient par :

$\vec{x}_\tau = \vec{f}_\tau[\vec{g}_t(\vec{x}_t)]$ avec $\vec{x}_t \in C_t$ et $\vec{x}_\tau \in C_\tau$.

Pour connaître le mouvement du système matériel entre les instants t_0 et t_1, on doit connaître les fonctions $\vec{f}_t$ pour $t \in [t_0, t_1]$ ou encore, la fonction $\vec{f}(\vec{X}, t)$ définie par :

$$\vec{x}_t = \vec{f}(\vec{X}, t) = \vec{f}_t(\vec{X}) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \qquad \vec{X} \in C_{t0}, \qquad \vec{x}_t \in C_t$$

De même pour l'application inverse on obtient : $\vec{X} = \vec{g}(\vec{x}_t, t) = \vec{g}_t(\vec{x}_t)$.

4. Conséquences de l'hypothèse du milieu continu:

Compte tenu de l'hypothèse du milieu continu, toutes les propriétés physiques du milieu seront supposées, à chaque instant, continues, par rapport aux coordonnées spatiales (x_1, x_2, x_3). En particulier la masse volumique $\rho(x_1, x_2, x_3)$ est supposée continue par rapport à (x_1, x_2, x_3).

5. Continuité des transformations :

Le système matériel est supposé occuper à chaque instant t un domaine $D(t)$ connexe.

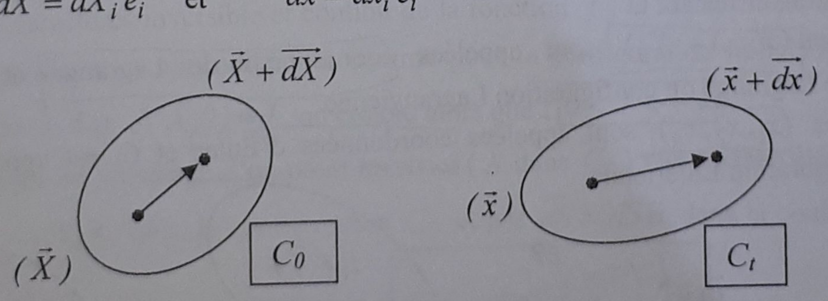
La fonction $\vec{f}$ est supposée continue par rapport à ses arguments ($\vec{X}$ et t). On suppose qu'elle admet des dérivées partielles premières (et si nécessaires des dérivées partielles secondes) continues par rapport à ses arguments.

Pour $\vec{X}$ fixé, l'ensemble des points $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$ constitue la trajectoire du point matériel défini par $\vec{X}$. La continuité de $\vec{f}$ implique la continuité de la courbe trajectoire.

6. Conséquences de la continuité des transformations :

- Deux points matériels infiniment voisins à un instant donné, sont infiniment voisins à tout autre instant (conservation de la proximité géométrique). Ces deux points définissent un vecteur matériel représenté par $\overrightarrow{dX}$ dans C_0 et par $\overrightarrow{dx}$ dans C_t.

On pose : $\overrightarrow{dX} = dX_i \vec{e}_i$ et $\overrightarrow{dx} = dx_i \vec{e}_i$



- Le vecteur $\overrightarrow{dx}$ s'obtient à partir de $\overrightarrow{dX}$ par une application linéaire définie à partir de la différentiation par rapport à $\vec{X}$ de la relation $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$. Cette application définit un tenseur du second ordre $\overline{\overline{F}}$ appelé tenseur gradient de la transformation, tel que : $\boxed{\overrightarrow{dx} = \overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) \cdot \overrightarrow{dX}}$.

M. TRIFA - D.G.M.- E.N.I.T.

Preuve :

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{X},t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = f_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = f_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = f_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases}$$

par différentiation on obtient $\begin{cases} dx_1 = (\partial f_1 / \partial X_1) dX_1 + (\partial f_1 / \partial X_2) dX_2 + (\partial f_1 / \partial X_3) dX_3 \\ dx_2 = (\partial f_2 / \partial X_1) dX_1 + (\partial f_2 / \partial X_2) dX_2 + (\partial f_2 / \partial X_3) dX_3 \\ dx_3 = (\partial f_3 / \partial X_1) dX_1 + (\partial f_3 / \partial X_2) dX_2 + (\partial f_3 / \partial X_3) dX_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{dx} = \overline{\overline{F}}(\vec{X},t) \cdot \overrightarrow{dX}$ avec $\boxed{F_{ij} = \partial f_i / \partial X_j = \partial x_i / \partial X_j}$ ou $\boxed{\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{Grad}}(\vec{f})}$ #

➢ Considérons au voisinage d'un point matériel ($\vec{X}$ dans C_0) un élément de volume matériel infinitésimal, défini par dv_0 dans la configuration C_0 et par dv dans la configuration C_t. Le rapport entre dv et dv_0 est égal au Jacobien J (à l'instant t) de la transformation $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X},t)$:

$$\boxed{dv = J\, dv_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{J(\vec{X},t) = det\left(\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)\right)}.$$

Preuve : Considérons dans la configuration C_0 au voisinage d'un point matériel $\vec{X}$, un parallélépipède élémentaire de sommet M_0 et construit à partir des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dX}$, $\overrightarrow{dX'}$ et $\overrightarrow{dX''}$.

Le volume algébrique $\overline{dv_0}$ du parallélépipède élémentaire s'obtient par :

$\overline{dv_0} = \left(\overrightarrow{dX}, \overrightarrow{dX'}, \overrightarrow{dX''}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{dv_0} = \varepsilon_{ijk}\, dX_i\; dX_j'\, dX_k''$

Examinons le parallélépipède construit à partir des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dx}$, $\overrightarrow{dx'}$ et $\overrightarrow{dx''}$ transportés respectivement de $\overrightarrow{dX}$, $\overrightarrow{dX'}$ et $\overrightarrow{dX''}$:

$\overline{dv} = \left(\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dx'}, \overrightarrow{dx''}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{dv} = \varepsilon_{mnp}\, dx_m\; dx_n'\, dx_p''$

Comme $\quad \overrightarrow{dx} = \overline{\overline{F}}.\overrightarrow{dX}, \quad \overrightarrow{dx'} = \overline{\overline{F}}.\overrightarrow{dX'} \quad$ et $\quad \overrightarrow{dx''} = \overline{\overline{F}}.\overrightarrow{dX''}$

Alors $\quad dx_m = F_{mi}\, dX_i, \quad dx_n' = F_{nj}\, dX_j' \quad$ et $\quad dx_p'' = F_{pk}\, dX_k''$

$\overline{dv} = \varepsilon_{mnp} F_{mi} F_{nj} F_{pk}\, dX_i\; dX_j'\, dX_k''$

En utilisant la relation : $\varepsilon_{ijk} \det[F] = \varepsilon_{mnp} F_{im} F_{jn} F_{kp} = \varepsilon_{mnp} F_{mi} F_{nj} F_{pk}$

On obtient : $\boxed{\overline{dv} = \underbrace{\det[F]}_{J}\; \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, dX_i\; dX_j'\, dX_k''}_{\overline{dv_0}} = J\, \overline{dv_0}}$ d'où $\quad dv = J\, dv_0$ #

Le Jacobien J s'interprète comme la dilatation volumique dans le mouvement entre les configurations C_0 et C_t.

Compte tenu des caractères inversible et continu de la fonction $\vec{f}$, le Jacobien est une fonction réelle continue à valeurs finies et non nulles ; et comme pour la configuration initiale C_0 (à $t=0$), on a $\vec{f}(\vec{X},0) = \vec{X}$ c'est-à-dire $J(\vec{X},0) = 1$, on conclu alors que : $\boxed{0 < J < +\infty}$.

➢ Considérons au voisinage d'un point matériel ($\vec{X}$ dans C_0) une surface élémentaire orientée, définie par $\overrightarrow{dS_0} = dS_0\, \vec{n}_0$ dans la configuration C_0 et par $\overrightarrow{dS} = dS\, \vec{n}$ dans la configuration C_t. Les éléments de surface dS et dS_0 sont tels que : $\boxed{dS\, \vec{n} = J\, dS_0 \left(\overline{\overline{F}}^T\right)^{-1} . \vec{n}_0}$

Preuve : On considère au voisinage d'un point matériel $\vec{X}$ et dans la configuration C_0, un élément de surface dS_0 construit à partir des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX'}$.

Examinons l'élément de surface dS construit à partir des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dx}$ et $\overrightarrow{dx}'$ transportés respectivement de $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX}'$:

Soit $\vec{n}_0$ et $\vec{n}$ les normales respectives à dS_0 et dS . On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{dX} \wedge \overrightarrow{dX}' = dS_0\, \vec{n}_0 \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{dx} \wedge \overrightarrow{dx}' = dS\, \vec{n} \qquad (2)$$

La projection de la relation (2) selon les vecteurs de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donne :

$dS\, n_i = \varepsilon_{ijk}\, dx_j\, dx'_k$ soit en utilisant les relations de transport : $dx_j = F_{jq} dX_q$ et $dx'_k = F_{kr} dX'_r$, on obtient : $dS\, n_i = \varepsilon_{ijk}\, F_{jq}\, F_{kr}\, dX_q\, dX'_r$

Dans l'expression ci-dessus l'indice i est un indice franc, en multipliant les deux membres par F_{ip} et en sommant sur i, on obtient : $dS\, F_{ip} n_i = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, F_{ip}\, F_{jq}\, F_{kr}}_{\varepsilon_{pqr} \det(\overline{\overline{F}})} dX_q\, dX'_r$

Où encore : $dS\, F_{ip} n_i = J\, \varepsilon_{pqr}\, dX_q\, dX'_r$ soit en écriture vectorielle :

$$dS\, \overline{\overline{F}}^T \vec{n} = J\, \overrightarrow{dX} \wedge \overrightarrow{dX}' = J\, dS_0\, \vec{n}_0$$

D'où le résultat : $\quad dS_0\, \vec{n}_0 = \dfrac{1}{J} dS\, \overline{\overline{F}}^T \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad dS\, \vec{n} = J dS_0\, \overline{\overline{F}}^{-T} \vec{n}_0$ #

- Des points matériels qui à un instant donné forment un ensemble connexe, volume, surface, ou ligne forment encore un ensemble connexe à tout instant. Ces points définissent respectivement un volume matériel, une surface matérielle ou une ligne matérielle.
- Les points matériels qui à un instant donné se trouvent à l'intérieur d'une surface fermée restent à tout instant à l'intérieur de la surface transformée.
- Les points matériels qui à un instant donné forment la frontière d'un milieu continu, en forment encore la frontière à tout instant.
- Le principe de conservation de la masse stipule que la masse contenue à l'intérieur d'une surface matérielle fermée reste constante au cours du temps. En particulier la masse d'un élément de volume matériel autour d'un point matériel reste constante. En notant ρ et ρ_0 la masse volumique de ce point matériel respectivement dans les configurations C_t et C_0, on a : $\boxed{\rho_0 = \rho J}$

<u>Preuve</u> : Soit dm la masse d'un élément de volume matériel autour d'un point matériel, en appliquant le principe de conservation de la masse entre les configurations C_t et C_0, on a :

$dm = \rho_0\, dv_0 = \rho\, dv$. En utilisant la relation $dv = J\, dv_0$ on obtient $\rho_0 = \rho J$. #

7. Limitation de la mécanique des milieux continus :

- La mécanique des milieux continus étudie le mouvement de la matière à une échelle macroscopique. La matière est donc supposée continue et occupant, à chaque instant, un domaine spatial continu. Ceci suppose donc qu'à l'échelle à laquelle se place l'étude, les discontinuités microscopiques de la matière n'ont pas une grande influence sur le phénomène étudié. En particulier, l'élément de volume considéré infinitésimal à l'échelle de la mécanique des milieux continus doit contenir suffisamment de molécules pour qu'en moyenne le caractère discontinu n'ai pas d'influence. Cet élément de volume doit cependant rester suffisamment petit devant les dimensions du système matériel étudié afin de pouvoir appliquer les règles du calcul différentiel. Ceci constitue une première limitation fondamentale de cette théorie.

- L'hypothèse de continuité stricte ne permet pas de traiter des phénomènes du type cavitation en mécanique des fluides, ou fissuration en mécanique des solides ou d'une manière générale les phénomènes qui engendrent des discontinuités particulières. Ces phénomènes peuvent être traités en relâchant un peu l'hypothèse de continuité en admettant éventuellement une discontinuité en un certain nombre fini de singularités (points, lignes, surfaces).