Mécanique des Milieux Continus
T.D. n°5

Exercice 1
Une éprouvette cylindrique d'axe Oz, de rayon R et de hauteur h, est constituée d'un matériau thermoélastique linéaire homogène et isotrope. Les transformations étudiées dans cet exercice sont supposées homogènes et vérifiant les hypothèses des petites perturbations. Les forces de volume sont négligées.

Déterminer les champs des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ et des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$, dans chacune des situations suivantes :

a) L'éprouvette est posée sur un support rigide et lubrifié et est soumise à une élévation de température uniforme τ.

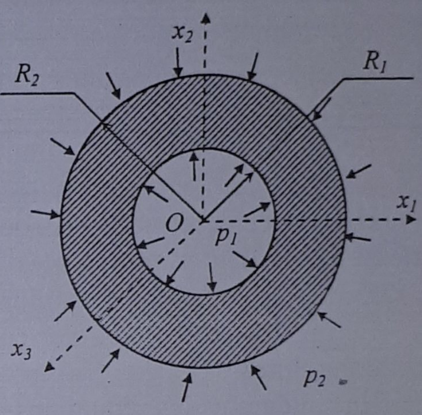
b) L'éprouvette est placée dans un trou (ayant les dimensions de l'éprouvette), réalisé dans un massif rigide, sa face supérieure est libre. Le contact massif -éprouvette est sans frottement et l'éprouvette est le siège d'une élévation de température uniforme τ.

Problème 1:
Réservoir sphérique sous pression soumis à une distribution de température stationnaire

On considère un réservoir sphérique, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2. La paroi intérieure du réservoir est soumise à une pression p_1 et une température T_1 sa paroi extérieure est soumise à une pression p_2 et une température T_2.

Le comportement du matériau constituant le réservoir est thermoélastique linéaire, homogène et isotrope.

Les forces de volume sont supposées négligeables et les échanges thermiques volumiques sont nuls. Le réservoir est en équilibre.



Parti I

On pose $\tau = T - T_0$ l'écart de température par rapport à la température de référence T_0 ($\tau << T_0$).

1. Ecrire l'équation de la chaleur pour ce problème.
2. Déterminer le champ de températures dans le réservoir.

Parti II

3. Montrer qu'en chaque point du réservoir, le déplacement est radial et ne dépend que de la coordonnée sphérique r ($\vec{u} = u_r(r)\,\vec{e}_r$).
4. Résoudre les équations de Navier et déterminer la forme du champ de déplacements.
5. Calculer les composantes du tenseur des déformations et celui des contraintes en fonction du déplacement $u_r(r)$.
6. Ecrire les conditions aux limites du problème. Donner les expressions finales du déplacement $u_r(r)$ et des composantes du tenseur des contraintes.

Problème 2:

Cylindre creux soumis à une pression intérieure et une distribution de température stationnaire

On considère un cylindre creux infiniment long, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2, soumis à une pression intérieure uniforme p et une distribution de température stationnaire $T(r)$.
A une température de référence T_0, le comportement du matériau constituant le cylindre est élastique linéaire, homogène et isotrope. On désigne par E et ν le module d'Young et le coefficient de Poisson et par λ et μ les coefficients de Lamé du matériau, mesurés à la température de référence T_0 et en conditions isothermes.
Le cylindre est en équilibre et on suppose que les forces de volume et les échanges thermiques volumique sont négligeables.
On pose $\tau = T - T_0$ l'écart de température par rapport à la température de référence.

Partie 1:

- **a)** Ecrire l'équation de la chaleur pour ce problème.
- **b)** Déterminer le champ de températures sachant que $\tau(R_1) = \tau_1$ et $\tau(R_2) = \tau_2$.

Partie 2: Méthode des déplacements

1. Montrer qu'en chaque point du cylindre, le déplacement est radial et ne dépend que de la coordonnée cylindrique r ($\vec{u} = u_r(r)\,\vec{e}_r$).
2. Calculer les composantes du tenseur des déformations et celui des contraintes en fonction du déplacement $u_r(r)$.
3. Ecrire les conditions aux limites pour ce problème.
4. En résolvant les équations de Navier, déterminer le champ de déplacements. En déduire les champs de déformations et de contraintes.

Partie 3: Méthode des contraintes

1. Ecrire les équations d'équilibre pour ce problème.
2. Ecrire les équations de compatibilité en fonction des composantes du tenseur des contraintes.
3. En intégrant les équations d'équilibre et de compatibilité, déterminer le champ des contraintes et celui des déformations.
4. Donner l'expression du champ de déplacement.

****

ANNEXE

Tenseur Laplacien d'un tenseur du second ordre symétrique :

- **En coordonnées cartésiennes :** $\left[\Delta\overline{\overline{\sigma}}\right]_{ij} = \sigma_{ij,ll}$

- **En coordonnées cylindriques :**

$$\Delta\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{rr} - \frac{2}{r^2}(2\sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) & \Delta\sigma_{r\theta} + \frac{2}{r^2}(\sigma_{rr,\theta} - \sigma_{\theta\theta,\theta} - 2\sigma_{r\theta,\theta}) & \Delta\sigma_{rz} - \frac{1}{r^2}(2\sigma_{\theta z,\theta} + \sigma_{rz}) \\ \Delta\sigma_{r\theta} + \frac{2}{r^2}(\sigma_{rr,\theta} - \sigma_{\theta\theta,\theta} - 2\sigma_{r\theta,\theta}) & \Delta\sigma_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2}(2\sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) & \Delta\sigma_{\theta z} \\ \Delta\sigma_{rz} - \frac{1}{r^2}(2\sigma_{\theta z,\theta} + \sigma_{rz}) & \Delta\sigma_{\theta z} + \frac{1}{r^2}(2\sigma_{rz,\theta} - \sigma_{\theta z}) & \Delta\sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

avec $\Delta(f) = f_{,rr} + \frac{1}{r} f_{,r} + \frac{1}{r^2} f_{,\theta\theta} + f_{,zz}$

Problème 1 :

1) Eq de la chaleur :

$$K \Delta \tau + \underbrace{\rho_0 r}_{\text{échange thermique volumique}} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \tau = 0}$$

2) Cas général $\tau = \tau(r, \theta, \varphi)$

D'après la symétrie de la géométrie et chargement thermique $\tau = \tau(r)$

$$\Delta \tau(r) = \tau_{,rr} + 2\frac{\tau_{,r}}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{,r}) = 0 \Rightarrow r^2 \tau_{,r} = c'$$

$$\tau(r) = -\frac{c'}{r} + d \Rightarrow \boxed{\tau(r) = \frac{c}{r} + d}$$

CL sur T

$$\begin{cases} SR_1 : T^d = T_1 \\ SR_2 : T^d = T_2 \end{cases} \quad \text{on pose} \begin{cases} \tau_1 = T_1 - T_0 \\ \tau_2 = T_2 - T_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau(R_1) = \tau_1 \\ \tau(R_2) = R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{R_1} + d = \tau_1 \\ \frac{c}{R_2} + d = \tau_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = (\tau_1 - \tau_2)\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ d = \frac{\tau_1 R_1 - \tau_2 R_2}{R_1 - R_2} \end{cases}$$

3) Cas général : $\vec{u} = U_r(r, \theta, \varphi)\,\vec{e_r} + \underbrace{U_\theta(r, \theta, \varphi)}_{0}\,\vec{e_\theta} + \underbrace{U_\varphi(r, \theta, \varphi)}_{0}\,\vec{e_\varphi}$

D'après la sym de la géométrie et des chargements mécanique et thermiq

on a : $\vec{u} = U_r(r)\,\vec{e_r}$

4) Eq de Navier :

$$(\lambda + 2\mu)\,\vec{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{u}) - \mu\,\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{u})) - 3K\alpha\,\vec{\text{grad}}\,\tau = \vec{0}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{u})) = \vec{0}$$

$$\vec{\text{grad}}(\underbrace{\text{div}(\vec{u})}_{f(r)}) = \underbrace{\left(\frac{3K}{\lambda + 2\mu}\right)}_{\alpha_0} \alpha\,\vec{\text{grad}}\,\tau = \vec{\text{grad}}(\underbrace{\alpha_0 \tau(r)}_{g(r)})$$

$$\Rightarrow \text{div}\,\vec{u} = \alpha_0 \tau(r) + A'$$

$$\Rightarrow \underbrace{U_{r,r} + \frac{2U_r}{r}}_{} = \frac{\alpha_0 c}{r} + \underbrace{\alpha_0 d + A'}_{A''}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r) = \alpha_0 \frac{c}{r} + A'' \Rightarrow r^2 U_r = \frac{\alpha_0 c}{2} r^2 + \frac{A'}{3} r^3 + B$$

$$\Rightarrow U_r = \alpha_0 \frac{c}{2} + \frac{A'}{3} r + \frac{B}{r^2} \Rightarrow \boxed{U_r = Ar + \frac{B}{r^2} + \frac{\alpha_0 c}{2}}$$

5) $$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{\text{grad}}}(\vec{u}) + \bar{\bar{\text{grad}}}^T(\vec{u})\right)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\text{grad}}}\,\vec{u} = \begin{pmatrix} U_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U_r}{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(U_{r,r} + \frac{2U_r}{r}\right) + 2\mu\,U_{r,r} - 3K\alpha\tau$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(U_{r,r} + \frac{2U_r}{r}\right) + 2\mu\frac{U_r}{r} - 3K\alpha\tau$$

a) $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - 3K\alpha\tau \delta_{ij}$

$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha\tau\delta_{ij}$

On cherche $\bar{\bar{\sigma}}$ et $\bar{\bar{\varepsilon}}$ indépendant de x_1, x_2, x_3

<u>CL</u> : $\partial D = S_h \cup S_0 \cup S_R$

- S_h : $T_1^d = 0$; $T_2^d = 0$; $T_3^d = 0 \rightarrow \vec{n} = \vec{e_3}$; $\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d$
  $\Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$
- S_0 : $T_1^d = 0$; $T_2^d = 0$; $U_3^d = 0 \rightarrow \vec{n} = -\vec{e_3} \Rightarrow \sigma_{13} = 0$; $\sigma_{23} = 0$
- S_R : $T_1^d = 0$; $T_2^d = 0$; $T_3^d = 0$
  $\rightarrow$ pour $M(R, 0, x_3)$; $\vec{n} = \vec{e_1} \Rightarrow \vec{T}(M, n) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \cdot \vec{n} = \vec{T}^d$
  $\Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 = \sigma_{12}$
  $\rightarrow$ Pour $M(0, R, x_3)$ $\vec{n} = \vec{e_2} \Rightarrow \sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{32} = 0$

$\Longrightarrow \boxed{\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{0}}} \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \alpha\tau \cdot \bar{\bar{I}}$

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \alpha\tau > 0$

- $\varepsilon_{11} = \alpha\tau > 0 \Rightarrow \frac{R - R_0}{R_0} = \alpha\tau \Rightarrow R \nearrow$
- $\varepsilon_{33} = \alpha\tau > 0 \Rightarrow \frac{h - h_0}{h_0} = \alpha\tau \Rightarrow h \nearrow$

b) <u>CL</u> $\Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$

S_h : $T_1^d = 0$; $T_2^d = 0$; $T_3^d = 0$

- S_0 : $T_1^d = 0$; $T_2^d = 0$; $U_3^d = 0 \rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$
  $\vec{T}_t^d = \vec{0}$; $\vec{U}_n^d = \vec{0}$
- S_R : $\vec{n} = \vec{e_1}$; $U_1^d = 0$; $T_2^d = 0$; $T_3^d = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{31} = 0 \end{cases}$
  $\rightarrow$ pour $M(R, 0, x_3)$
  $\rightarrow$ pour $M(0, R, x_3)$; $\vec{n} = \vec{e_2}$: $T_1^d = 0$; $u_2^d = 0$; $T_3^d = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{32} = 0 \end{cases}$

$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$

CL de type déplacement

- S_R pour $M(R, 0, x_3)$: $\left.\begin{matrix} U_1(R, 0, x_3) = 0 \\ U_1(0, 0, x_3) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow R = R_0 \Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{R - R_0}{R_0} = 0$ compression

Pour $M(0, R, x_3)$; $\left.\begin{matrix} U_2(0, R, x_3) = 0 \\ U_1(0, 0, x_3) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow R = R_0 \rightarrow \varepsilon_{22} = 0$

$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$; $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{33} - 3K\alpha\tau \\ \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_{33} - 3K\alpha\tau \end{cases} \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22}$

$\varepsilon_{11} = 0 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(2\sigma_{11}) + \alpha\tau = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{11} = -\frac{\alpha\tau E}{1-\nu}} < 0$ $\boxed{\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha\tau} > 0$

$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E}(2\sigma_{11}) + \alpha\tau = 2\nu\alpha\tau$

$$\begin{cases} U_{r,r} = A - \dfrac{2B}{r^3} \\ \dfrac{U_r}{r} = A + \dfrac{B}{r^3} + \dfrac{\alpha C}{2r} \end{cases}$$

$$tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) = U_{r,r} + 2\frac{U_r}{r} = 3A + \frac{\alpha_0 C}{r}$$

$$\sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu) A - 4\mu B \frac{1}{r^3} + \lambda \frac{\alpha_0 C}{r} - 3k\alpha\tau$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (3\lambda + 2\mu) A + 2\mu B \frac{1}{r^3} + (\lambda + \mu) \frac{\alpha_0 C}{r} - 3k\alpha\tau$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = a - \dfrac{b}{r^3} + \lambda \dfrac{\alpha_0 C}{r} - 3k\alpha\tau(r) \quad (1) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = a + \dfrac{b}{2r^3} + (\lambda + \mu) \dfrac{\alpha_0 C}{r} - 3k\alpha\tau(r) \; (2) \end{cases}$$

b) $\partial D = S_{R_1} \cup S_{R_2}$

$$\begin{cases} S_{R_1} : T_r^d = p_1 \; ; \; T_\theta^d = 0 \; ; \; T_\varphi^d = 0 \; ; \; \vec{n} = -\vec{e_r} \\ S_{R_2} : T_r^d = -p_2 \; ; \; T_\theta^d = 0 \; ; \; T_\varphi^d = 0 \end{cases}$$

$+ S_{R_1} : \vec{n} = -\vec{e_r} \; ; \; \vec{T}(M,\vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \Rightarrow \boxed{\sigma_{rr}(R_1) = -p_1}$

$+ S_{R_2} : \vec{n} = \vec{e_r} \; ; \; \vec{T}(M,\vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \Rightarrow \boxed{\sigma_{rr}(R_2) = -p_2}$

$$\begin{matrix} (1) \Rightarrow \\ (1) \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} a - \dfrac{b}{R_1^3} + \lambda \dfrac{\alpha_0 C}{R_1} - 3k\alpha\tau(R_1) = -p_1 \\ a - \dfrac{b}{R_2^3} + \lambda \dfrac{\alpha_0 C}{R_2} - 3k\alpha\tau(R_2) = -p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - \dfrac{b}{R_1^3} = -\left(p_1 + \lambda \dfrac{\alpha_0 C}{R_1} - 3k\alpha\tau_1\right) \quad (3) \\ a - \dfrac{b}{R_2^3} = -\left(p_2 + \lambda \alpha_0 \dfrac{C}{R_2} - 3k\alpha\tau_2\right) \quad (4) \end{cases}$$

p_1' ; p_2'

(4) - (3) $\Rightarrow b = (p_1' - p_2') \dfrac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}$

(4) R_2^3 - (3) $R_1^3 \Rightarrow a = \dfrac{p_1' R_1^3 - p_2' R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}$

$A = \dfrac{a}{3\lambda + 2\mu}$; $\boxed{B = \dfrac{b}{4\mu}}$

≠ type de Conditions aux limites

1) **Surface libre** : $\vec{T}^d = \vec{0}$

2) Surface soumise à des forces surfac. tangentielles : $\vec{T} = c\vec{t}$ (F

3) Surface de normale $\vec{n}$ soumise à une force $\vec{p}$: $\vec{T}^d = -p\vec{n}$

4) Surface en adhérence avec un solide rigide et fixe : $\vec{u}^d = \vec{0}$

et mobile : $\vec{u}^d = \vec{u}^{(S.R)}$

5) " "

6) Surface en contact sans frottement avec un solide rigide et fixe :

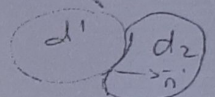
$\vec{T_t}^d = \vec{0}$ et $\vec{U_n}^d = \vec{0}$

et mobile :

7) " " " "

$\vec{T_t}^d = \vec{0}$; $\vec{U}_n^d = U_n^{(S.R)}$

≠ types de Condition d'interface :



⊛ T est toujours Continue : $\bar{\bar{\sigma}}^{(1)}(M).\vec{n} = \bar{\bar{\sigma}}^{(2)}.\vec{n}$ $\forall M \in S_{12}$

⊛ $\vec{U}$? ⊕ si S adhérence parfait : Continuité de $\vec{u}$: $\vec{U}^{(1)}(M) = \vec{U}^{(2)}(M)$ $\forall M \in S_{12}$

⊕ si contact sans frottement : Continuité de U_n : $\vec{U}^{(1)}(M).\vec{n} = \vec{U}^{(2)}(M).\vec{n}$ $\forall M \in S_{12}$