

Mécanique des Milieux Continus

T.D. n°4

Exercice 1 : Transformations homogènes

Une éprouvette cylindrique d'axe Oz , de rayon R et de hauteur h , est constituée d'un matériau élastique linéaire homogène et isotrope. Les transformations étudiées dans cet exercice sont supposées homogènes et vérifiant les hypothèses des petites perturbations. Les forces de volume sont négligées.

Déterminer les champs des contraintes $\bar{\sigma}$ et des déformations $\bar{\varepsilon}$, dans chacune des situations suivantes :

- L'éprouvette est posée sur un support rigide et lubrifié (contact sans frottement) et est soumise à une contrainte de compression uniforme P appliquée sur sa face supérieure. Sa surface latérale est libre.
- L'éprouvette est placée dans un trou (ayant les dimensions de l'éprouvette), réalisé dans un massif rigide. Le contact massif-éprouvette est sans frottement et l'éprouvette est soumise à une contrainte de compression uniforme P appliquée sur sa face supérieure.

Exercice 2 : Equilibre d'un tube cylindrique sous pression

Un tube cylindrique de section circulaire de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 , d'axe Oz et de hauteur h , est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope et homogène. Le tube est soumis à une pression intérieure p_1 et une pression extérieure p_2 . Les forces de volume sont négligées et on se place dans le cadre des hypothèses des petites perturbations.

- Déterminer les champs de contraintes et de déplacements dans le tube dans chacun des cas suivants:
 - La section S_0 ($z=0$) est en contact sans frottement avec un plateau rigide immobile et la section S_h ($z=h$) est en contact sans frottement avec un plateau rigide soumis à un déplacement $u_z^d = -\delta$. Examiner le cas $\delta = 0$.
 - La section S_0 est soumise à une densité surfacique de force $\bar{T}_0^d = \sigma \bar{e}_z$ et la section S_h est soumise à la densité surfacique de force $\bar{T}_h^d = -\sigma \bar{e}_z$.
- Dans le cas b) et pour $\sigma=0$, déterminer les points critiques dans le tube pour un matériau obéissant au critère de Von Mises avec une limite en traction simple σ_e . En déduire les pressions limites dans le cas $p_2=0$, et dans le cas $p_1=0$. Examiner le cas où $R_1 \ll R_2$ et $p_1=0$ et comparer le résultat obtenu avec celui d'un cylindre plein soumis à la pression p_2 .

Exercice 3 : Torsion d'une barre cylindrique

Une barre d'axe Oz de section circulaire de rayon R et de hauteur h , est constituée d'un matériau élastique linéaire isotrope et homogène. Les forces de volume sont négligées. La surface latérale est non chargée. Les sections extrêmes S_0 et S_h sont soumises à des couples de torsion respectivement $-C\bar{e}_z$ et $C\bar{e}_z$. Les hypothèses des petites perturbations sont vérifiées.

On cherche pour ce problème d'équilibre, une solution pour le champ des déplacements de la forme :

$$\bar{u} = \alpha r z \bar{e}_\theta$$

où r, θ, z sont les coordonnées cylindriques, $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$ est la base orthonormée des coordonnées cylindriques et α une constante à déterminer.

- Ecrire les équations de Navier pour le champ \bar{u} .
- Déterminer le champ des contraintes dans la barre.
- Déterminer la constante α et donner sa signification physique.
- Le matériau constituant la barre obéit au critère de Von Mises pour la limite du comportement élastique avec une limite en traction simple σ_e . Donner la position des points de la barre, les plus critiques vis-à-vis de ce critère. Calculer le couple C_0 limites du comportement purement élastique de la barre.

Exercice 4 :

Un solide cylindrique d'axe Oz , de section S , de hauteur h et constitué d'un matériau homogène élastique linéaire isotrope est placé entre les deux plateaux d'une presse. Le plateau inférieur placé en $z=0$ est immobile. On impose au plateau supérieur un déplacement vertical égal à $-\delta$ ($\delta > 0$). La surface latérale est non chargée et les forces de volume sont négligées. Le contact entre le solide et les plateaux est supposé à adhérence parfaite, c'est à dire qu'aucun glissement n'est possible dans ces interfaces.

On note $\vec{F} = -F \cdot \vec{e}_z$ la force (inconnue dans ce problème) exercée sur le solide par le plateau supérieur.

1) Montrer que pour le champ de déplacement réel \vec{u} on a: $W(\vec{u}) = \frac{1}{2} F \cdot \delta$

où W est la fonctionnelle énergie élastique de déformation.

- 2) Déterminer les champs de déplacement cinématiquement admissibles et linéaires.
- 3) Déterminer les champs de contrainte statiquement admissibles et homogènes.
- 4) Dédire des questions 2) et 3) un encadrement de la force F .

Exercice 5 : Compression d'une barre cylindrique composite

Un solide composite ayant la forme d'un cylindre circulaire d'axe Oz , de hauteur h , de rayon extérieur R_2 , est constitué d'un noyau coaxial cylindrique circulaire de rayon R_1 , et d'une matrice annulaire comprise entre les rayons R_1 et R_2 . Les matériaux constituant le noyau et la matrice sont élastiques linéaires isotropes et homogènes. Les coefficients élastiques sont E_1 et ν_1 pour le noyau et E_2 et ν_2 pour la matrice.

On suppose qu'il y a adhérence parfaite au contact entre le noyau et la matrice. Les forces de masse sont nulles et la surface latérale est non chargée. La base inférieure S_0 du solide est en contact sans frottement avec un plateau rigide et immobile. La base supérieure S_h est en contact sans frottement avec un plateau rigide et soumis à un déplacement $u_z^d = -\delta$ selon l'axe Oz . On se place dans le cadre des hypothèses des petites perturbations.

Déterminer les champs de contraintes et de déplacements dans le solide.

T1 N°4

Ex 1: transf homog

Coord cartésiennes
a) $\vec{\sigma} = ?$ $\vec{E} = ?$

Transf homog. en chaine $\vec{\sigma}$ et \vec{E} indep. (Les états de M)
(à composer, contractés)
dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

CL: $\partial D = S_n U S_o U S_R$

③ Coord. cylindriques:

+ S_n : $T_r^d = 0; T_\theta^d = 0; T_z^d = -P$
 + S_o : $T_r^d = 0; T_\theta^d = 0; U_z^d = 0$
 + S_R : $T_r^d = 0; T_\theta^d = 0; T_z^d = 0$ (surface libre)

④ Coord. cartésiennes:

+ S_n : $T_1^d = 0; T_2^d = 0; T_3^d = -P$
 + S_o : $T_1^d = 0; T_2^d = 0; U_3^d = 0$
 + S_R : $T_1^d = 0; T_2^d = 0; T_3^d = 0$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

exploitation des CL:

+ S_n :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} = \vec{T}^d + S_o \cdot \vec{T}^d(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n}$$

$$\begin{cases} \vec{T} \cdot \vec{e}_1 = T_1^d \\ \vec{T} \cdot \vec{e}_2 = T_2^d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{33} = 0 \\ -\sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{13} = 0 = \sigma_{31} \\ \sigma_{23} = 0 = \sigma_{32} \\ \sigma_{33} = -P \end{cases}$$

+ S_R : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} = \vec{T}^d$

1 Point $M(R, 0, x_3)$; $\vec{n} = \vec{e}_1$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 0 \\ \sigma_{21} = 0 = \sigma_{12} \\ \sigma_{31} = 0 = \sigma_{13} \end{cases}$$

2) Point $M(0, R, x_3)$; $\vec{n} = \vec{e}_2$

$$\begin{cases} \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{11} = \frac{\nu P}{E}; \quad \epsilon_{22} = \frac{\nu P}{E}; \quad \epsilon_{33} = -\frac{P}{E} < 0$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\nu P}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu P}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{E} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \vec{E} \cdot \vec{x} + \vec{w} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\nu P}{E} x_1 - w_{12} x_2 - w_{13} x_3 + b_1 \\ u_2 = \frac{\nu P}{E} x_2 - w_{12} x_1 + w_{23} x_3 + b_2 \\ u_3 = -\frac{P}{E} x_3 - w_{13} x_1 - w_{23} x_2 + b_3 \end{cases}$$

CL: $S_o: U_3(x_1, x_2, 0) = U_3^d = 0$
 $-w_{13} x_1 - w_{23} x_2 + b_3 = 0 \Rightarrow w_{13} = 0$
 $\forall x_1, x_2 \Rightarrow b_3 = 0$

b) On cherche $\vec{\sigma}$ et \vec{E} indp de x_1, x_2, x_3

+ CL en coord cylindriques

- S_n : $T_r^d = 0, T_\theta^d = 0; T_z^d = -P$

- S_o : $T_r^d = 0; T_\theta^d = 0; U_z^d = 0$

- S_R : sans frottement \leftarrow composante tangentielle

$U_R^d = 0; T_\theta^d = 0; T_z^d = 0$

+ CL en coord cartésiennes

- S_n : $T_1^d = 0; T_2^d = 0; T_3^d = -P$

- S_o : $T_1^d = 0; T_2^d = 0; U_3^d = 0$

- S_R : $T_1^d = 0; U_n^d = 0$ (en prend des pts particuliers)

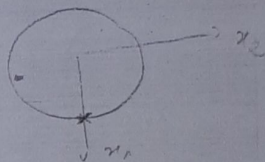
$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

+ S_n : $M(x_1, x_2, h); \vec{n} = \vec{e}_3$
 $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \rightarrow \begin{cases} \sigma_{13} = 0 = \sigma_{31} \\ \sigma_{23} = 0 = \sigma_{32} \\ \sigma_{33} = -P \end{cases}$

+ S_o : $M(x_1, x_2, 0); \vec{n} = -\vec{e}_3$
 $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} \rightarrow \begin{cases} -\sigma_{13} = 0 \\ -\sigma_{23} = 0 \end{cases}$

+ S_R : Pour $M(R, 0, x_3); \vec{n} = \vec{e}_1$
 CL: $U_1^d = 0; T_2^d = 0; T_3^d = 0$
 $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{e}_1 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{21} = 0 = \sigma_{12} \\ \sigma_{31} = 0 = \sigma_{13} \end{cases}$

o) Pour $M(0, R, x_3); \vec{n} = \vec{e}_2$
 CL: $U_2^d = 0; T_1^d = 0; T_3^d = 0$
 $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{e}_2 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{32} = 0 \end{cases}$



$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}$$

Exploitation de CL de type déplacement:

+ S_R : Pour $M(R, 0, x_3) \rightarrow \begin{cases} U_1(R, 0, x_3) = 0 \\ U_2(0, 0, x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow R = R_0 \Rightarrow \frac{R - R_0}{R_0} = 0$
 $\Rightarrow \frac{dR - dR_0}{dR_0} = 0 \Rightarrow E_{11} = 0 \Rightarrow \sigma_{11} = \lambda E_{33}$

o) Pour $M(0, R, x_3) \rightarrow \begin{cases} U_2(0, R, x_3) = 0 \\ U_1(0, 0, x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow R = R_0 \Rightarrow E_{22} = 0 \Rightarrow \sigma_{22} = \lambda E_{33}$

$E_{11} = 0 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (2\sigma_{11} - P) \Rightarrow \sigma_{11} = -\frac{\nu}{1-\nu} P < 0$: compression

$E_{33} = \left(\frac{1-\nu}{E}\right) \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (2\sigma_{11} + \sigma_{33}) \Rightarrow E_{33} = \frac{2\nu^2 + \nu - 1}{1-\nu} \frac{P}{E}$

$$\vec{u} = \vec{E} \cdot \vec{x} + \vec{W} \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

Déplacement solution générale

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12}^0 & w_{13}^0 \\ w_{21}^0 & 0 & w_{23}^0 \\ w_{31}^0 & w_{32}^0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = w_{12}^0 x_2 + w_{13}^0 x_3 + b_1$$

$$U_2 = -w_{12}^0 x_1 + w_{23}^0 x_3 + b_2$$

$$U_3 = -w_{33}^0 x_1 + w_{32}^0 x_2 + b_3 + \epsilon_{33}^0 x_3$$

CL: $S_0: H(x_1, x_2, 0): U_3^d = 0 \Rightarrow U_3(x_1, x_2, 0) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \Rightarrow \begin{cases} w_{13}^0 = 0 \\ w_{23}^0 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

$S_R: H(R, 0, x_3): U_1^d = 0 \Rightarrow U_1(R, 0, x_3) = 0 \quad \forall x_3 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ w_{13}^0 = 0 \end{cases}$

$H(0, R, x_3): U_2^d = 0 \Rightarrow U_2(0, R, x_3) = 0 \quad \forall x_3 \Rightarrow \begin{cases} w_{23}^0 = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases}$

ΔP_{nc}

$$\begin{cases} U_2 = -w_{12} x_2 & \text{rotation autour de l'axe } x_2 \\ U_2 = -w_{12} x_1 \\ U_3 = \epsilon_{33}^0 x_3 \end{cases}$$

Exercice 2:

(Transformation géométrique en coord. cylind.)

Resolution en coord. cylindrique par la méthode de déplacement

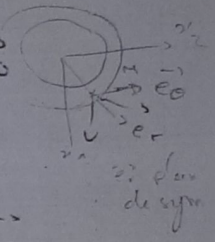
Cas général: $\vec{u}(r, \theta, z) = U_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + U_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + U_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$

Pb axisymétrique: $\vec{u}(r, z) = U_r(r, z) \vec{e}_r + U_z(r, z) \vec{e}_z$

eq Navier:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \mu \text{rot}(\text{rot}(\vec{u})) = \vec{0}$$

\hookrightarrow Pos de solution analytique



CL: $\partial D = S_{R_1} \cup S_{R_2} \cup S_0 \cup S_h$

$S_{R_1}: T_r^d = p_1; T_\theta^d = 0; T_z^d = 0$

$S_{R_2}: T_r^d = -p_2; T_\theta^d = 0; T_z^d = 0$

$S_0: T_r^d = 0; T_\theta^d = 0; U_z^d = 0$

$S_h: T_r^d = 0; T_\theta^d = 0; U_z^d = -\delta$

$$\begin{cases} H(R_1, 0, z): \vec{n} = -\vec{e}_r \\ H(R_2, 0, z): \vec{n} = \vec{e}_r \\ H(r, 0, 0): \vec{n} = -\vec{e}_z \\ H(r, 0, h): \vec{n} = \vec{e}_z \end{cases}$$

$H(R_1, 0, z): \vec{n} = -\vec{e}_r$

chignons une solution simplifiée de la forme: $\vec{u} = U_r(r) \vec{e}_r + U_z(z) \vec{e}_z$

$\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot}(\vec{u})) = \vec{0} \Rightarrow \text{grad}(\text{div} \vec{u}) = \vec{0}$

$\text{div}(\vec{u}) = \frac{U_r}{r} + U_{r,r} + \frac{U_{z,z}}{z}$; $\text{grad}(\text{div}(\vec{u})) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_r}{r} + U_{r,r} \right) \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} U_{z,z} \vec{e}_z = \vec{0}$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_r}{r} + U_{r,r} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} U_{z,z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_r}{r} + U_{r,r} = A' \\ U_{z,z} = C \end{cases}$$

$\Rightarrow U_r = \frac{A'}{2} r + \frac{B'}{r} \Rightarrow U_r = Ar + \frac{B}{r}$

$U_z = Cz + D$

Exploitation des CL de types déplacement:

$U_z(z=h) = -\delta \Rightarrow C = -\frac{\delta}{h}$

$S_0: U_z(z=0) = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow S_h$

CL de type force et doit avoir $\vec{\sigma}$

$$\vec{u} \rightarrow \vec{\epsilon} \rightarrow \vec{\sigma} (L.C.)$$

$$\vec{\epsilon} = \frac{1}{2} (\vec{g} \text{grad}(\vec{u}) + \vec{g} \text{grad}^T(\vec{u}))$$

$$\vec{g} \text{grad}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} U_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & U_{z,z} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} U_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & U_{z,z} \end{pmatrix}$$

trace $\vec{\epsilon} = \text{div } \vec{u}$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda (U_{r,r} + \frac{U_r}{r} + U_{z,z}) + 2\mu U_{r,r} & ; U_{r,r} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda (U_{r,r} + \frac{U_r}{r} + U_{z,z}) + 2\mu \frac{U_r}{r} & ; \frac{U_r}{r} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = \lambda (U_{r,r} + \frac{U_r}{r} + U_{z,z}) + 2\mu U_{z,z} & ; U_{z,z} = C \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0 \end{cases}$$

$$U_{r,r} + \frac{U_r}{r} + U_{z,z} = 2A + C \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)A + \lambda C - 2\mu B \frac{1}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = 2(\lambda + \mu)A + \lambda C + 2\mu B \frac{1}{r^2} \\ \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)C + 2\lambda A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = a - \frac{b}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2} \\ \sigma_{zz} = c \end{cases}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

+ S_{R_1} : $\vec{T}(M, n) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{T} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(R_1) = P_1 \Rightarrow a - \frac{b}{R_1^2} = -P_1 \quad (1) \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

+ S_{R_2} : $\vec{T}(M, n) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{T}^d \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(R_2) = P_2 \Rightarrow a + \frac{b}{R_2^2} = -P_2 \quad (2) \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$$R_2^2(2) - R_1^2(1) \Rightarrow a = \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow b = \frac{(P_1 - P_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}}{R_2^2 - R_1^2}$$

+ S_0 et S_n les CL sont vérifiées: $B = \frac{b}{2\mu}$; $a = 2(\lambda + \mu)A + \lambda C$

$$c = (\lambda + 2\mu)C + 2\lambda A$$

$$c = (\lambda + 2\mu)C + \frac{2\lambda}{2(\lambda + \mu)} a - \frac{2\lambda^2}{2(\lambda + \mu)} C = \frac{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu) - \lambda^2}{\lambda + \mu} C + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} a$$

$$c = 2\lambda a + \epsilon C$$

Car $\epsilon = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \begin{cases} U_z = 0 \quad \forall z \\ \epsilon_{zz} = 0 \end{cases}$

$$\epsilon_{zz} = 0 = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})$$

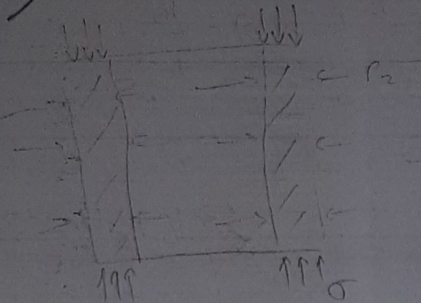
$$\Rightarrow \sigma_{zz} = \lambda (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

Remarque

$$\epsilon \begin{pmatrix} U_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon \text{ est dans un plan}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

b)



CL: $+ S_{R1}: T_r^d = P_{R1}; T_\theta^d = 0; T_z^d = 0$
 $+ S_{R2}: T_r^d = -P_2; T_\theta^d = 0; T_z^d = 0$
 $+ S_0: T_r^d = 0; T_\theta^d = 0; T_z^d = 0$
 $+ S_h: T_r^d; T_\theta^d = 0; T_z^d = -G$

$\vec{u} = u_r(r) \vec{e}_r + u_z(z) \vec{e}_z$

Loi de Navier Lamont:

$u_r = Ar + \frac{B}{r}$
 $u_z = Cz + D$

La loi de Comportement

$\sigma_{rr} = a - \frac{b}{r^2}$
 $\sigma_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2}$
 $\sigma_{zz} = c$

ELHI domo:
 $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rz} = 0$

Exploitation CL

$S_{R1} \Rightarrow a = \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$
 $S_{R2} \Rightarrow b = (P_1 - P_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$

$S_0: \vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}(M) \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \Rightarrow \sigma_{zz} = c = 0$
 $S_h: \vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}^d \Rightarrow c = 0$

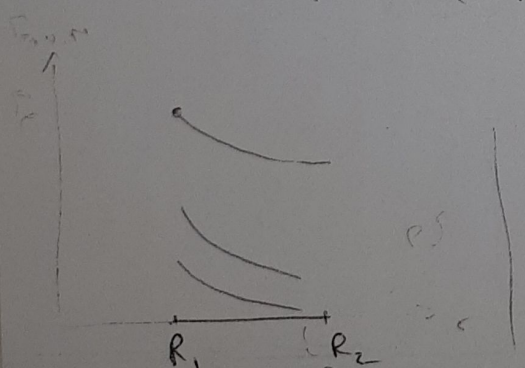
D reste inconnue: D = SR 10z

2) a) b) $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} \sigma_{rr} = a - \frac{b}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2} \end{cases}$

Remarque

Etat de contrainte plane $\perp \vec{e}_z \Rightarrow \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$
 $\epsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{rr} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$
 $\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \Rightarrow \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$
 $\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{-\nu}{1-\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \Rightarrow \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta})$

$\sigma_{eq \text{ v.M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2)} < \sigma_e$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4b^2}{r^4} + (a + \frac{b}{r^2})^2 + (a - \frac{b}{r^2})^2} = \sqrt{\frac{3b^2}{r^4} + a^2} < \sigma_e$



c) Cas $P_2 = 0: a = \frac{P_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; b = \frac{P_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = R_2^2 a$

$\sigma_{eq \text{ v.M}} = \sqrt{\frac{3b^2}{R_1^4} + a^2} = |a| \sqrt{\frac{3R_2^4}{R_1^4} + 1} < \sigma_e$
 $= \frac{P_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \sqrt{\frac{3R_2^4}{R_1^4} + 1} < \sigma_e \Rightarrow P_1 < \frac{\sigma_e (R_2^2 - R_1^2)}{\sqrt{\frac{3R_2^4}{R_1^4} + 1} R_1^2}$
 P1 Limite

pk critique $\rightarrow \sigma_{eq \text{ v.M}} \rightarrow r = R_1$

c) Cas $P_2 = 0$ et $R_1 \ll R_2$

$$a = -P_2 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \approx -P_2$$

$$b = -P_2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \approx -P_2 R_1^2 = a R_1^2$$

$$\sigma_{\text{eqv}} = \sqrt{a^2 + \frac{3b^2}{R_1^4}}$$

$$(\sigma_{\text{eqv}})_{\text{max}} = \sqrt{a^2 + \frac{3b^2}{R_1^4}} = |a| \sqrt{1+3} = 2|a| = 2P_2 < \sigma_e$$

2) $P_2 < \frac{\sigma_e}{2} = P_2 \text{ limit}$

Cas d'un cylindre plein ($R_1 = 0$)

$$a = P_2 \text{ et } b = 0$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -P_2 \text{ ; } \sigma_{zz} = 0$$

$$(\sigma_{\text{eqv}}) = \sqrt{0^2} = |a| = P_2 < \sigma_e = P_2 \text{ limit}$$

$\varphi_r = A + \frac{B}{r}$ cylindre plein (U_r fini)

$$U_z = C_3 + 0 \quad b = 2pB = 0$$

Ex 5:

solution $\vec{u}^{(1)}$ et $\vec{\sigma}^{(1)}$ dans (1)

$\vec{u}^{(2)}$ et $\vec{\sigma}^{(2)}$ dans (2)

$$\partial D = S_{R_2} \cup S_0 \cup S_R$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{R_2}: T_r^d = 0, T_\theta^d = 0, T_z^d = 0 \\ S_0: T_r^d = 0, T_\theta^d = 0, U_z^d = 0 \\ S_R: T_r^d = 0, T_\theta^d = 0, U_z^d = -\delta \end{array} \right\}$$

interface: S_{R_1}

C.I

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\sigma}^{(1)}(R_1, \theta, z) \cdot \vec{e}_r = \vec{\sigma}^{(2)}(R_1, \theta, z) \cdot \vec{e}_r \\ \vec{u}^{(1)}(R_1, \theta, z) = \vec{u}^{(2)}(R_1, \theta, z) \end{array} \right\}$$

(14 inconnues)
(14 eq)