

# Chapitre 8 Thermoélasticité linéaire

## 1. La loi de comportement thermoélastique linéaire :

### a) Hypothèses :

On se place dans le cadre des hypothèses des petites perturbations par rapport à un état de référence supposé naturel (non chargé et non déformé). Dans cet état les tenseurs des déformations et des contraintes sont nuls ( $\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_0 = \bar{\bar{0}}$  et  $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_0 = \bar{\bar{0}}$ ), la température est  $T_0$ .

On désigne par  $\tau$  l'écart de température par rapport à la température de référence :  $\tau = T - T_0$ . On suppose que  $\tau$  est petit par rapport à  $T_0$  ( $\tau \ll T_0$ ).

### b) La loi de comportement thermoélastique linéaire - cas général :

La loi de comportement thermoélastique linéaire s'écrit dans le cas général (matériau anisotrope) sous la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}}(\bar{x}, t) = \bar{\bar{R}}(\bar{x}) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{x}, t) - \tau(\bar{x}, t) \bar{\bar{\alpha}}(\bar{x}, t)$$

où :

Le tenseur  $\bar{\bar{R}}$  est le tenseur de rigidité élastique du matériau (introduit au chapitre 6) ;

Le tenseur du second ordre symétrique  $\bar{\bar{\alpha}}$ , appelé tenseur des coefficients thermiques, définit les propriétés de dilatation linéaire du matériau. Ses composantes s'expriment en Pa/°K.

### c) La loi de comportement thermoélastique linéaire isotrope :

Dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité  $\bar{\bar{R}}$  ne dépend que de deux coefficients indépendants  $\lambda$  et  $\mu$ . Le tenseur  $\bar{\bar{\alpha}}$  est sphérique, on pose :  $\bar{\bar{\alpha}} = 3K\alpha\bar{\bar{I}}$  avec  $3K = (3\lambda + 2\mu)$ .  
On obtient :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \lambda\text{trace}(\bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{I}} - 3K\alpha\tau\bar{\bar{I}}$$

Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  appelés coefficients d'élasticité de Lamé, caractérisent les propriétés élastiques du matériau. Ces propriétés peuvent aussi être caractérisées par le module d'Young  $E$  (module de rigidité à la traction) et le coefficient de Poisson  $\nu$  et on obtient dans ce cas :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\text{trace}(\bar{\bar{\sigma}})\bar{\bar{I}} + \alpha\tau\bar{\bar{I}}$$

avec

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Le coefficient  $3K = (3\lambda + 2\mu)$  représente le module de rigidité à la compression.

Le coefficient  $\alpha$ , dit coefficient de dilatation thermique linéique, caractérise la propriété de dilatabilité du matériau.

Les tenseurs  $\bar{\bar{R}}$  et  $\bar{\bar{\alpha}}$  ou les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$  peuvent varier d'un point à un autre (cas du matériau hétérogène) et peuvent varier avec la température de référence  $T_0$ .

## 2. Les équations de la thermoélasticité linéaire pour un matériau homogène isotrope :

En combinant les équations du mouvement :  $\text{div}\bar{\bar{\sigma}} + \rho_0\bar{\bar{f}}_m = \rho_0\frac{\partial^2\bar{\bar{u}}}{\partial t^2}$  et la loi de comportement :

$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \lambda\text{trace}(\bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{I}} - 3K\alpha\tau\bar{\bar{I}}$  avec  $\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{Grad}}\bar{\bar{u}} + \overrightarrow{\text{Grad}}^T\bar{\bar{u}}\right)$ , on obtient les équations de Navier en thermoélasticité :

$$(\lambda + 2\mu)\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\bar{\bar{u}}) - \mu\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\bar{\bar{u}}) - 3K\alpha\overrightarrow{\text{grad}}\tau + \rho_0\bar{\bar{f}}_m = \rho_0\frac{\partial^2\bar{\bar{u}}}{\partial t^2}$$

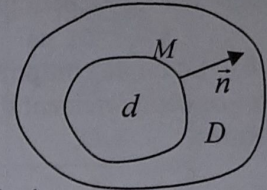


Dans le cas d'un problème d'équilibre thermoélastique linéarisé, la combinaison des équations de compatibilité, de la loi de comportement thermoélastique linéaire homogène isotrope et des équations d'équilibre, permet d'obtenir les équations de Beltrami qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\Delta \bar{\sigma} + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \overline{\text{grad}} \left( \overline{\text{grad}} [tr(\bar{\sigma}) + \alpha E \tau] \right) + \left( \frac{\alpha E}{1-\nu} \right) \Delta \tau \cdot \bar{I} + \left( \frac{\nu}{1-\nu} \right) \text{div}(\rho_0 \bar{f}_m) \bar{I} + \left( \overline{\text{grad}}(\rho_0 \bar{f}_m) + \overline{\text{grad}}^T(\rho_0 \bar{f}_m) \right) = \bar{0}$$

### 3. Détermination du champ de température:

#### a) Description des échanges thermiques:



Soit à un instant  $t$  un système matériel occupant un domaine  $D(t)$  de frontière  $\partial D$  et soit  $d$  un domaine matériel inclus dans  $D$ , de frontière  $\partial d$ . Supposons qu'à l'instant  $t$  le sous domaine  $d$  soit strictement inclus dans  $D$ .

Les échanges thermiques entre le sous domaine  $d$  et le milieu extérieur sont de deux types :

##### ➤ Les échanges à distance ou volumiques :

Ils sont caractérisés, en un point  $M \in d$  et à un instant  $t$ , par une densité massique de taux de chaleur  $r(M, t)$  reçue par  $d$  de la part des sources extérieures à  $D$ .

Pour un élément de volume  $dv$  entourant le point  $M$ , le taux de chaleur élémentaire reçue s'écrit :

$$dP_{th,v} = \rho r dv$$

##### ➤ Les échanges par contact ou surfaciques à travers $\partial d$ :

Ils sont caractérisés, en un point  $M \in \partial d$  de normale extérieure  $\bar{n}$  et à un instant  $t$ , par une densité surfacique de taux de chaleur  $h(M, t, \bar{n})$ , reçue par le domaine  $d$  par conduction.

On montre que cette densité  $h$  dépend linéairement de  $\bar{n}$  et qu'il existe un vecteur  $\bar{q}(M, t)$  appelé flux de chaleur ou courant de chaleur tel que :  $h(M, t, \bar{n}) = -\bar{q}(M, t) \cdot \bar{n}$ .

Le taux de chaleur élémentaire échangée à travers un élément de surface  $dS$  de  $\partial d$  entourant le point  $M$  s'écrit :

$$dP_{th,s} = h(M, t, \bar{n}) dS = -\bar{q}(M, t) \cdot \bar{n} dS$$

A partir de cette schématisation des échanges thermiques on peut calculer le taux de chaleur (ou la puissance thermique) reçue par le domaine  $d$  :

$$P_{th} = \int_d \rho r dv - \int_{\partial d} \bar{q} \cdot \bar{n} dS$$

Lorsque la frontière  $\partial d$  admet une partie commune avec la frontière  $\partial D$ , on introduit la densité surfacique  $h^d$  du taux de chaleur reçue par conduction par  $d$  à l'instant  $t$  de la part de l'extérieur de  $D$  et on remplace le terme  $-\bar{q} \cdot \bar{n}$  par  $h^d$  sur  $\partial d \cap \partial D$ .

#### b) Comportement thermique :

Le comportement thermique linéaire est défini par la loi de Fourier généralisée :

$$\bar{q} = -\bar{k} \cdot \overline{\text{grad}}(T)$$

Le tenseur du second ordre  $\bar{k}$  définit les propriétés de conductivité thermique du matériau.

Dans le cas isotrope, le tenseur  $\bar{k}$  est sphérique, on pose :  $\bar{k} = k \bar{I}$ . Le coefficient  $k$ , dit coefficient de conductivité thermique, caractérise la propriété de conductibilité du matériau.

#### c) Equation de la chaleur :

L'utilisation du premier et du second principe de la thermodynamique dans le cadre des hypothèses de la thermoélasticité linéaire permet d'aboutir à l'équation de la chaleur :

$$k \Delta \tau + \rho_0 r - 3K\alpha T_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \bar{u}) = \rho_0 C_\epsilon \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

où le coefficient  $C_\epsilon$  représente la chaleur spécifique à déformation constante.



Dans de nombreux cas, on peut négliger le terme  $3K\alpha T_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \bar{u})$ . On obtient alors un problème

de thermoélasticité découplé pour lequel on résout l'équation de la chaleur:  $k \Delta \tau + \rho_0 r = \rho_0 C_\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial t}$

pour déterminer le champ de température. Ensuite on résout les équations de Navier pour obtenir le champ de déplacements (ou les équations d'équilibre et celles de Beltrami pour obtenir le champ des contraintes).

Dans le cas d'un problème d'équilibre ou d'un problème stationnaire, les dérivées par rapport au temps et les conditions initiales disparaissent. L'équation de la chaleur traduit dans ce cas l'équilibre thermique local et se réduit à :

$$k \Delta \tau + \rho_0 r = 0$$

#### 4. Transformation d'un problème d'équilibre thermoélastique linéaire découplé en un problème d'équilibre élastique linéarisé (isotherme) :

On considère le problème d'équilibre thermoélastique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{div } \bar{\sigma} + \rho_0 \bar{f}_m = \bar{0} \\ \bar{\sigma} = \bar{R} : \bar{\varepsilon} - \tau \bar{\alpha} \\ \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overline{\text{Grad}} \bar{u} + \overline{\text{Grad}}^T \bar{u} \right) \\ k \Delta \tau + \rho_0 r = 0 \end{cases} \text{ avec les données : } \begin{cases} \bar{f}_m \text{ sur } D \\ T_i^d \text{ sur } S_{f_i} \\ u_i^d \text{ sur } S_{u_i} \\ \tau^d \text{ sur } \partial D \\ r \text{ sur } D \end{cases}$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}' = \bar{\sigma} + \tau \bar{\alpha} \\ \rho_0 \bar{f}'_m = \rho_0 \bar{f}_m - \text{div}(\tau \bar{\alpha}) \\ T_i^{d'} = T_i^d + \tau \alpha_{ij} n_j \end{cases}$$

On obtient le système:

$$\begin{cases} \text{div } \bar{\sigma}' + \rho_0 \bar{f}'_m = \bar{0} \\ \bar{\sigma}' = \bar{R} : \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overline{\text{Grad}} \bar{u} + \overline{\text{Grad}}^T \bar{u} \right) \\ k \Delta \tau + \rho_0 r = 0 \end{cases} \text{ avec les données : } \begin{cases} \bar{f}'_m \text{ sur } D \\ T_i^{d'} \text{ sur } S_{f_i} \\ u_i^d \text{ sur } S_{u_i} \\ \tau^d \text{ sur } \partial D \\ r \text{ sur } D \end{cases}$$

On peut remarquer que les trois premières équations de ce système correspondent à celles d'un

problème d'équilibre élastique linéarisé (isotherme) avec les données

$$\begin{cases} \bar{f}'_m \text{ sur } D \\ T_i^{d'} \text{ sur } S_{f_i} \\ u_i^d \text{ sur } S_{u_i} \end{cases}$$



Annexe

\*\*\*\*\*

Caractéristiques de quelques matériaux  
(Source: Cours d'élasticité - D. Bellet)

	$E$ Module d'Young en $10^9$ Pascal	$\nu$ Nombre de Poisson	$\rho$ Masse volumique en $10^3$ kg/m <sup>3</sup>	$\alpha$ Coefficient de dilatation linéaire en $10^{-6}/^\circ K$
aluminium	71	0,34	2,6	23
alliage AU4G	75	0,33	2,8	23,5
acier de construction	210	0,285	7,8	13
acier à ressorts	220	0,29	7,8	13
acier inox 18-10	203	0,29	7,9	16,5
Invar	140	0,29	8,7	0,9
fonte grise courante	90 à 120	0,29	7,1 à 7,2	9 à 11
fonte malléable	170 à 190	0,17	7,2 à 7,4	9 à 11
zinc commercial	78	0,21	7,15	30
civre	100	0,33	8,9	17
béryllium	300	0,05	1,85	12
bronze au béryllium	130	0,34	8,25	17
titane	105	0,34	4,5	9
granite	60	0,27	2,3 à 3	20
marbre	26	0,3	2,8	8 à 8,5
verre	60	0,2 à 0,3	2,5 à 2,9	3,4 à 5,9
plexiglass	2,9	0,4	1,8	80 à 90

\*\*\*\*\*

Ordre de grandeur des caractéristiques thermodynamiques de quelques matériaux  
(Source: Mécanique des matériaux solides - J. Lemaître & J. L. Chaboche)

	Température de fusion $T_M$ °C	Masse volumique $\rho$ kg/m <sup>3</sup>	Conductivité thermique $k$ W/m °C	Chaleur spécifique $C_e$ J/kg °C
Duralumins	600	2 800	{ 115 à 20 °C 150 à 200 °C	900 à 20 °C
Aciers	1 500	7 800	{ 46 à 20 °C 29 à 900 °C	{ 460 à 20 °C 625 à 900 °C
Laitons	900	8 600	128 à 400 °C	450 à 400 °C
Polymères	200	1 300		1 500 à 20 °C
Bétons	2 200	2 000	1,2 à 20 °C	880 à 20 °C
Bois	—	500	0,15 à 20 °C	2 000 à 20 °C