Chapitre 7 Les équations de l'élasticité linéaire

1. Définition :

On se place dans le cadre des hypothèses H1, H2, et H3 (chapitre 6).
Pour résoudre un problème d'élasticité linéaire, il faut trouver un champ de déplacements $\vec{u}(\vec{x},t)$ et un champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}(\vec{x},t)$ vérifiant les équations du mouvement (linéarisées et écrites dans la géométrie initiale, $\rho \approx \rho_0$) et la loi de comportement :

$$\boxed{div\overline{\overline{\sigma}} + \rho_0 \vec{f}_m = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}, \boxed{\overline{\overline{\sigma}}(\vec{x},t) = \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{x},t)}, \text{ avec } \boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{Grad}}(\vec{u}) + \overline{\overline{Grad}}^T(\vec{u}) \right)}$$

Ces équations s'écrivent en coordonnées cartésiennes et dans une B. O. N. $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$/

$$\sigma_{ij,j} + \rho_0 (f_m)_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = R_{ijkl}\, \varepsilon_{lk} \quad (2)$$

avec $$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \quad (3)$$

On obtient ainsi 9 équations à 9 inconnues (3 u_i et 6 σ_{ij}) auxquelles s'ajoutent des conditions aux limites et des conditions initiales.

Problème régulier : Un problème régulier ou "bien posé" est un problème pour lequel sont données en tout point de la frontière ∂D, 3 composantes complémentaires de l'effort surfacique ou du déplacement.
En élasticité linéaire, un problème régulier est un problème linéaire, qui admet une solution unique et pour lequel on peut appliquer le principe de superposition.

Suivant le type de conditions aux limites, on peut distinguer trois types de problèmes réguliers:

- Problème de type I ou problème en déplacement: les déplacements sont donnés à la frontière ∂D : $u_i\big|_{\partial D} = u_i^d$.
- Problème de type II ou problème en contrainte: les efforts appliqués à la frontière ∂D sont donnés : $\sigma_{ij}\, n_j\big|_{\partial D} = T_i^d$.
- Problème de type III ou mixte : sur chaque partie de la frontière ∂D, sont donnés :
  - soit les efforts
  - soit les déplacements
  - soit certaines composantes du déplacement et les composantes complémentaires de l'effort.

  $u_i\big|_{Su_i} = u_i^d$, $\sigma_{ij}\, n_j\big|_{Sf_i} = T_i^d$ avec $Su_i \cup Sf_i = \partial D$ et $Su_i \cap Sf_i = \phi$ pour $i = 1, 2, 3$.

2. Existence et unicité de la solution - Théorème de superposition:

On se limite ici au problème d'équilibre élastique linéarisé ($\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{0}$).

Théorème d'existence et d'unicité :
Le problème de l'équilibre élastique linéarisé admet une solution unique $\overline{\overline{\sigma}}$ et une solution $\vec{u}$ définie à un déplacement de solide rigide près $\vec{u}^0$ respectant l'hypothèse des petites perturbations et vérifiant les conditions :
$u_i^0 = 0$ sur Su_i pour $i = 1, 2, 3$.

Preuve: on admet l'existence de la solution et on va démontrer son unicité.
Supposons que $(\overline{\overline{\sigma}}^1,\vec{u}^1)$ et $(\overline{\overline{\sigma}}^2,\vec{u}^2)$ sont deux solutions d'un même problème d'équilibre élastique linéarisé et posons : $\overline{\overline{\sigma}}' = \overline{\overline{\sigma}}^1 - \overline{\overline{\sigma}}^2$ et $\vec{u}' = \vec{u}^1 - \vec{u}^2$.
On peut ainsi vérifier que les champs $\overline{\overline{\sigma}}'$ et $\vec{u}'$ vérifient les équations :

$$div\overline{\overline{\sigma}}' = \vec{0}\ ,\ \overline{\overline{\sigma}}' = \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}'\ , \text{ avec } \overline{\overline{\varepsilon}}' = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\overline{Grad}}(\vec{u}') + \overline{\overline{Grad}}^T(\vec{u}')\right)$$

et les données : $u_i'\big|_{Su_i} = 0\,,\ \sigma_{ij}'\, n_j\big|_{Sf_i} = 0\,.$

En multipliant scalairement les deux membres de l'équation d'équilibre $div\overline{\overline{\sigma}}' = \vec{0}$ par le champ de déplacements $\vec{u}'$, et en intégrant sur le volume du domaine D on obtient :

$$\int_D \vec{u}'.div\overline{\overline{\sigma}}'\,dv = 0 \Rightarrow \int_D \sigma_{ij,j}' u_i'\,dv = 0 \Rightarrow \int_D (\sigma_{ij}' u_i')_{,j}\,dv - \int_D \sigma_{ij}' u_{i,j}'\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \sigma_{ij}' n_j u_i' dS - \int_D \sigma_{ij}' u_{i,j}'\,dv = 0 \text{ (Théorème de la divergence)}$$

$$\Rightarrow \sum_i \int_{Su_i} \sigma_{ij}' n_j \underbrace{u_i'}_{0} dS + \sum_i \int_{Sf_i} \underbrace{\sigma_{ij}' n_j}_{0} u_i' dS - \int_D \sigma_{ij}' u_{i,j}'\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_D \sigma_{ij}' u_{i,j}'\,dv = 0 \Rightarrow \int_D \overline{\overline{\sigma}}' : \overline{\overline{\varepsilon}}'\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_D \overline{\overline{\varepsilon}}' : \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}'\,dv = 0$$

La stabilité du matériau impose que le tenseur de rigidité $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}}$ soit défini positif c'est-à-dire :

$\overline{\overline{\varepsilon}}' : \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}' > 0 \quad \forall \overline{\overline{\varepsilon}}' \neq \overline{\overline{0}}$ (symétrique).

On peut donc déduire que $\overline{\overline{\varepsilon}}' = \overline{\overline{0}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}' = \overline{\overline{\sigma}}^1 - \overline{\overline{\sigma}}^2 = \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}' = \overline{\overline{0}}$ c'est-à-dire $\overline{\overline{\sigma}}^1 = \overline{\overline{\sigma}}^2$.

D'autre part il a été montré que la nullité du champ des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}'$ entraîne l'existence d'un champs de déplacement de solide rigide $\vec{u}^0$ tel que : $\vec{u}' = \vec{u}^1 - \vec{u}^2 = \vec{u}^0$. Ce champ vérifie donc les conditions aux limites : $u_i' = u_i^0 = 0$ sur Su_i pour $i = 1, 2, 3$.

Remarque :

Dans certains problèmes les conditions aux limites sur le déplacement permettent d'assurer l'unicité du champ $\vec{u}$.

Théorème de superposition :

Soient $(\overline{\overline{\sigma}}^1, \vec{u}^1)$ et $(\overline{\overline{\sigma}}^2, \vec{u}^2)$ les solutions d'un même problème d'équilibre élastique linéarisé (même géométrie, même matériau et mêmes surfaces Su_i , Sf_i) avec respectivement les données ($\vec{f}_m^1, \vec{u}^{1^d}, \vec{T}^{1^d}$) et ($\vec{f}_m^2, \vec{u}^{2^d}, \vec{T}^{2^d}$).

On a alors : $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in IR$, les champs $\overline{\overline{\sigma}} = \alpha_1 \overline{\overline{\sigma}}^1 + \alpha_2 \overline{\overline{\sigma}}^2$ et $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}^1 + \alpha_2 \vec{u}^2$ constituent les solutions du même problème d'équilibre avec les données :

$$\vec{f}_m = \alpha_1 \vec{f}_m^1 + \alpha_2 \vec{f}_m^2\,,\ \vec{u}^d = \alpha_1 \vec{u}^{1^d} + \alpha_2 \vec{u}^{2^d}\,,\ \vec{T}^d = \alpha_1 \vec{T}^{1^d} + \alpha_2 \vec{T}^{2^d}$$

Ce théorème signifie que la solution $(\overline{\overline{\sigma}}, \vec{u})$ d'un problème d'équilibre élastique linéarisé est linéaire par rapport au chargement ($\vec{f}_m, \vec{u}^d, \vec{T}^d$).

3. Les équations de l'élasticité pour un matériau homogène isotrope :

Pour résoudre un problème d'élasticité (régulier), on postule une forme particulière de la solution. Si elle vérifie les équations du mouvement, la loi de comportement, les conditions aux limites et les conditions initiales alors d'après l'unicité c'est la solution du problème.

Suivant que l'on postule un champ de déplacements ou un champ de contraintes on distinguera deux méthodes.

a) Equations de Navier ou équations aux déplacements :

Si on postule un champ de déplacements, on peut calculer les déformations par la relation (3) et les contraintes par la loi de comportement (2). Il ne reste plus qu'à vérifier les équations du mouvement, les conditions aux limites et les conditions initiales.

Si on exprime, dans l'équation du mouvement, les contraintes en fonction des déformations puis ces dernières en fonction des déplacements, on obtient les équations que doit vérifier le champ de déplacements postulé.

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}\\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\\ \varepsilon_{kk} = u_{k,k}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_{ij} = \lambda\,u_{k,k}\,\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (4)$$

Dans la suite on pose $\vec{f} = \rho_0\,\vec{f}_m$. En combinant (4) et l'équation du mouvement (1), on obtient :

$$\lambda\,u_{k,kj}\,\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,jj} + u_{j,ij}\right) + f_i = \rho_0\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\lambda\,u_{k,ki} + \mu\,u_{j,ji} + \mu\;u_{i,jj} + f_i = \rho_0\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \Rightarrow (\lambda+\mu)\,u_{j,ji} + \mu\;u_{i,jj} + f_i = \rho_0\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\lambda+\mu)\,\overrightarrow{grad}\left(div\;\vec{u}\right) + \mu\,\Delta\,\vec{u} + \vec{f} = \rho_0\,\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}$$

En utilisant la relation : $\Delta\,\vec{u} = \overrightarrow{grad}\left(div\;\vec{u}\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\;\vec{u}\right)$, on obtient :

$$\boxed{(\lambda+2\mu)\,\overrightarrow{grad}\left(div\;\vec{u}\right) - \mu\,\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\;\vec{u}\right) + \vec{f} = \rho_0\,\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}} \qquad (5)$$

Ces équations, dites **équations de Navier**, traduisent les équations du mouvement pour le champ de déplacements.

Donc la première méthode consiste à :

- postuler un champ de déplacements
- vérifier les équations de Navier
- vérifier les conditions aux limites et les conditions initiales.

Pour postuler un champ de déplacements, on s'inspire des conditions aux limites sur le déplacement et de la symétrie du problème.

b) Equations de Beltrami ou équations aux contraintes :

On se place dans le cas statique, si on postule un champ de contraintes, on peut calculer les déformations par la loi de comportement, mais pour calculer le champ de déplacements, il faut que le champ de déformations vérifie les équations de compatibilité.

Donc le champ de contraintes doit vérifier les équations d'équilibre et des équations traduisant les équations de compatibilité.

Les équations de compatibilité s'écrivent : $\Delta\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kk,ij} - \left(\varepsilon_{jk,ik} + \varepsilon_{ik,jk}\right) = 0$

En utilisant la loi de comportement : $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{ll}\,\delta_{ij}$, on obtient :

$$\left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\,\delta_{ij}\right)_{,kk} + \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk,ij} - \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}\right) + \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{ll,ik}\delta_{jk} + \sigma_{ll,jk}\delta_{ik}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (1+\nu)\sigma_{ij,kk} - \nu\sigma_{ll,kk}\,\delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} - (1+\nu)\left(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}\right) = 0$$

D'après les équations d'équilibre, on a :

$$\sigma_{jk,ik} = \sigma_{jk,ki} = -\left(f_j\right)_{,i} \text{ et } \sigma_{ik,jk} = \sigma_{ik,kj} = -\left(f_i\right)_{,j}$$

d'où : $(1+\nu)\sigma_{ij,kk} - \nu\sigma_{ll,kk}\,\delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} + (1+\nu)\left(f_{j,i} + f_{i,j}\right) = 0$.

En faisant la divergence de l'équation de Navier sans le terme d'inertie, on obtient :

$(\lambda+2\mu)\Delta\left(div\,\vec{u}\right) + div\left(\vec{f}\right) = 0$ (puisque $div\left(\overrightarrow{rot}\;\vec{V}\right) = 0 \;\; \forall\,\vec{V}$).

$(\lambda+2\mu)\left(u_{l,l}\right)_{,kk} + \left(f_k\right)_{,k} = 0$ d'où $\varepsilon_{ll,kk} = \left(u_{l,l}\right)_{,kk} = -\dfrac{1}{\lambda+2\mu}\left(f_k\right)_{,k}$

Comme $\sigma_{ll} = \dfrac{E}{1-2\nu}\,\varepsilon_{ll}$, alors :

$$\sigma_{ll,kk} = \frac{E}{1-2\nu}\,\varepsilon_{ll,kk} = -\frac{E}{(1-2\nu)(\lambda+2\mu)}(f_k)_{,k} = -\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(f_k)_{,k}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + (f_i)_{,j} + (f_j)_{,i} + \frac{\nu}{1-\nu}(f_k)_{,k}\delta_{ij} = 0} \qquad (6)$$

qu'on peut encore écrire sous la forme intrinsèque suivante :

$$\boxed{\Delta\overline{\overline{\sigma}} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\overline{\overline{grad}}\left(\overrightarrow{grad}\left[tr(\overline{\overline{\sigma}})\right]\right) + \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)div(\vec{f})\,\overline{\overline{I}} + \left(\overline{\overline{grad}}(\vec{f}) + \overline{\overline{grad}}^T(\vec{f})\right) = \overline{\overline{0}}}$$

Ces équations, dites **équations de Beltrami**, traduisent <u>en statique</u>, les équations de compatibilité pour les contraintes.

Donc la deuxième méthode de résolution d'un problème élasto -statique consiste à :

- postuler un champ de contraintes
- vérifier les équations d'équilibre
- vérifier les équations de Beltrami
- vérifier les conditions aux limites de type effort
- intégrer le champ de déplacements
- vérifier les conditions aux limites de type déplacement.

Dans le cas où les forces de volume sont uniformes, les équations de Beltrami se réduisent à :

$$\boxed{\Delta\overline{\overline{\sigma}} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\overline{\overline{grad}}\left(\overrightarrow{grad}\left[tr(\overline{\overline{\sigma}})\right]\right) = \overline{\overline{0}}} \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0}.$$

4. Problème axisymétrique:

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du domaine étudié est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de cet axe. Dans ce cas la solution est axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) ou sphériques (r,θ,φ), les dérivées partielles par rapport à θ sont nulles. On se ramène donc à un problème à deux variables (r,z) ou (r,φ) dans le plan méridien $\theta = $ constante.

En particulier, dans un système de coordonnées cylindriques (r,θ,z), le champ de déplacements est de la forme : $\vec{u} = u_r(r,z)\vec{e}_r + u_z(r,z)\vec{e}_z$.

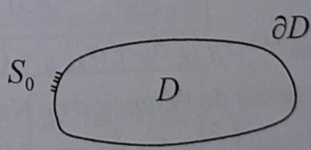
le champ de déformations est de la forme : $\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} u_{r,r} & 0 & \frac{1}{2}(u_{r,z}+u_{z,r}) \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}(u_{r,z}+u_{z,r}) & 0 & u_{z,z} \end{bmatrix}$

Pour un comportement élastique linéaire isotrope, le tenseur des contraintes associé est de la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

5. Principe de Saint-Venant:

Soit D un domaine élastique de frontière ∂D et S_0 une partie de cette frontière, sur laquelle s'exerce une distribution de forces surfaciques.



<u>Enoncé du principe</u> :

Dans les régions de D suffisamment éloignées de S_0, les champs de contraintes et de déplacements dépendent uniquement de la résultante des efforts appliqués sur S_0 et non de la manière précise dont ces efforts sont appliqués. Par conséquent, deux répartitions d'efforts surfaciques conduisant au même torseur résultant, donnent deux solutions très voisines, sauf au voisinage de S_0.

6. Les théorèmes énergétiques en élasticité statique:

a) Définitions :

En considérant un problème d'équilibre élastique linéarisé, on a les définitions suivantes :

Champ cinématiquement admissible (C.C.A.) : Un champ de déplacement $\hat{\vec{u}}$ est cinématiquement admissible, s'il vérifie les conditions aux limites de type déplacement : $\hat{u}_i\big|_{Su_i} = u_i^d$, $i = 1,2,3$.

Champ statiquement admissible (C.S.A.) : Un champ de contrainte $\hat{\bar{\bar{\sigma}}}$ est statiquement admissible, s'il vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites de type effort : $\hat{\sigma}_{ij}\, n_j\big|_{Sf_i} = T_i^d$, $i = 1,2,3$.

Energie élastique de déformation d'un C.C.A. $\hat{\vec{u}}$: On appelle énergie élastique de déformation d'un champ cinématiquement admissible $\hat{\vec{u}}$, la quantité :

$$\boxed{W(\hat{\vec{u}}) = \frac{1}{2}\int_D \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \bar{\bar{\bar{\bar{R}}}} : \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}})\, dv}$$

Pour un matériau élastique linéaire et isotrope, on obtient :

$$\boxed{W(\hat{\vec{u}}) = \frac{1}{2}\int_D \lambda\left(Tr(\bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}))\right)^2 + 2\mu\, \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}})\, dv}$$

Energie élastique de contrainte d'un C.S.A. $\hat{\bar{\bar{\sigma}}}$: On appelle énergie élastique de contrainte d'un champ statiquement admissible $\hat{\bar{\bar{\sigma}}}$ la quantité :

$$\boxed{W^*\left(\hat{\bar{\bar{\sigma}}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \hat{\bar{\bar{\sigma}}} : \bar{\bar{\bar{\bar{S}}}} : \hat{\bar{\bar{\sigma}}}\, dv}$$

Pour un matériau élastique linéaire et isotrope, on obtient :

$$\boxed{W^*\left(\hat{\bar{\bar{\sigma}}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \left(\tfrac{1+\nu}{E}\right)\hat{\bar{\bar{\sigma}}} : \hat{\bar{\bar{\sigma}}} - \tfrac{\nu}{E}\left(Tr(\hat{\bar{\bar{\sigma}}})\right)^2 dv}$$

Energie potentielle d'un C.C.A. $\hat{\vec{u}}$:

On appelle énergie potentielle d'un champ cinématiquement admissible $\hat{\vec{u}}$, la quantité :

$$\boxed{E_p\left(\hat{\vec{u}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_D \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \bar{\bar{\bar{\bar{R}}}} : \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}})\, dv}_{\text{Energie élastique de déformation}} - \underbrace{\left(\int_D \vec{f}.\hat{\vec{u}}\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d.\hat{u}_i\, dS\right)}_{\text{Travail des efforts ext. donnés dans } \hat{\vec{u}}}}$$

Pour un matériau élastique linéaire et isotrope, on obtient :

$$\boxed{E_p\left(\hat{\vec{u}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \lambda\left(Tr(\bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}))\right)^2 + 2\mu\, \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}})\, dv - \left(\int_D \vec{f}.\hat{\vec{u}}\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d.\hat{u}_i\, dS\right)}$$

Energie complémentaire d'un C.S.A. $\hat{\bar{\bar{\sigma}}}$:

On appelle énergie complémentaire d'un champ statiquement admissible $\hat{\bar{\bar{\sigma}}}$ la quantité :

$$\boxed{E_c\left(\hat{\bar{\bar{\sigma}}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_D \hat{\bar{\bar{\sigma}}} : \bar{\bar{\bar{\bar{S}}}} : \hat{\bar{\bar{\sigma}}}\, dv}_{\text{Energie élastique de contrainte}} - \underbrace{\sum_i \int_{Sui} u_i^d.\hat{\sigma}_{ij} n_j\, dS}_{\text{Travail des réactions associées à } \hat{\bar{\bar{\sigma}}}}}$$

Pour un matériau élastique linéaire et isotrope, on obtient :

$$\boxed{E_c\left(\hat{\bar{\bar{\sigma}}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \left(\tfrac{1+\nu}{E}\right)\hat{\bar{\bar{\sigma}}} : \hat{\bar{\bar{\sigma}}} - \tfrac{\nu}{E}\left(Tr(\hat{\bar{\bar{\sigma}}})\right)^2 dv - \sum_i \int_{Sui} u_i^d.\hat{\sigma}_{ij} n_j\, dS}$$

b) Théorème des travaux virtuels (T. T. V.) :

<u>**Enoncé**</u>**:** Pour tout champ de déplacements virtuel $\hat{\vec{u}}$ et pour tout champ de contraintes symétrique $\bar{\bar{\sigma}}^*$ vérifiant l'équation d'équilibre, on a :

$$\boxed{\int_D \vec{f}.\hat{\vec{u}}\, dv + \int_{\partial D} (\bar{\bar{\sigma}}^*.\vec{n}).\hat{\vec{u}}\, dS - \int_D \bar{\bar{\sigma}}^* : \bar{\bar{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}})\, dv = 0}$$

Preuve : Soit $\overline{\overline{\sigma}}^*$ un champ de contraintes symétrique vérifiant l'équation d'équilibre c'est-à-dire :

$$div\,(\overline{\overline{\sigma}}^*) + \vec{f} = \vec{0}$$

En multipliant scalairement par un champ de déplacements virtuel $\hat{\vec{u}}$ quelconque, et en intégrant sur le volume du domaine D, on obtient : $\int_D div(\overline{\overline{\sigma}}^*).\hat{\vec{u}}\,dv + \int_D \vec{f}.\hat{\vec{u}}\,dv = \vec{0}$

Dans une base cartésienne orthonormée, le premier terme s'écrit :

$$\int_D div\left(\overline{\overline{\sigma}}^*\right).\hat{\vec{u}}\,dv = \int_D \sigma^*_{ij,j}.\hat{u}_i\,dv \qquad = \int_D (\sigma^*_{ij}.\hat{u}_i)_{,j}\,dv - \int_D \sigma^*_{ij}.\hat{u}_{i,j}\,dv$$

L'utilisation du théorème de la divergence pour la première intégrale et de la symétrie du tenseur des contraintes pour la deuxième, permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_D div\left(\overline{\overline{\sigma}}^*\right).\hat{\vec{u}}\,dv &= \int_{\partial D} (\sigma^*_{ij}.\hat{u}_i).n_j\,dS - \int_D \sigma^*_{ij}.\hat{\varepsilon}_{ij}\,dv \\ &= \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}}^*.\vec{n}).\hat{\vec{u}}\,dS - \int_D \overline{\overline{\sigma}}^* : \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}})\,dv\end{aligned}$$ D'où le résultat annoncé.

c) Théorème de Claperon :

Enoncé: Pour un problème d'équilibre élastique linéarisé, l'énergie élastique de déformation d'un champ de déplacements solution $\vec{u}$, est égale à l'énergie élastique de contrainte du champ de contraintes solution $\overline{\overline{\sigma}}$ et est égale à la moitié du travail des forces extérieures dans le champ de déplacements solution $\vec{u}$.

$$\boxed{W(\vec{u}) = W^*(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\left(\int_D \vec{f}.\vec{u}dv + \int_{\partial D}(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}).\vec{u}\,dS\right)}$$

Preuve :

Par définition on a : $W(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\,dv$ et $W^*(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}} : \overline{\overline{\sigma}}\,dv$

Comme les champs solutions vérifient la loi de comportement : $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})$ et $\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) = \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}} : \overline{\overline{\sigma}}$

On a alors : $\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}} : \overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})$ d'où l'égalité :

$$W(\vec{u}) = W^*(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\,dv$$

En appliquant le théorème des travaux virtuels avec les champs solutions $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\vec{u}$, on obtient :

$$\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\,dv = \int_D \vec{f}.\vec{u}\,dv + \int_{\partial D}(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}).\vec{u}\,dS$$ D'où le résultat annoncé.

d) Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti :

On considère deux états d'équilibre d'un même système D constitué d'un matériau élastique linéaire :

- l'état d'équilibre (1) dans lequel les solutions ($\overline{\overline{\sigma}}^1, \vec{u}^1$) correspondent aux forces de volume $\vec{f}^1$ dans D et aux forces surfaciques $\vec{T}^1 = \overline{\overline{\sigma}}^1.\vec{n}$ sur ∂D ;
- l'état d'équilibre (2) dans lequel les solutions ($\overline{\overline{\sigma}}^2, \vec{u}^2$) correspondent aux forces de volume $\vec{f}^2$ dans D et aux forces surfaciques $\vec{T}^2 = \overline{\overline{\sigma}}^2.\vec{n}$ sur ∂D.

Enoncé: Le travail du système de forces ($\vec{f}^1, \vec{T}^1$) dans les déplacements produits par le système de forces ($\vec{f}^2, \vec{T}^2$), est égal au travail du système de forces ($\vec{f}^2, \vec{T}^2$) dans les déplacements produits par le système de forces ($\vec{f}^1, \vec{T}^1$).

$$\boxed{\int_D \vec{f}^1.\vec{u}^2 dv + \int_{\partial D}\vec{T}^1.\vec{u}^2\,dS = \int_D \vec{f}^2.\vec{u}^1 dv + \int_{\partial D}\vec{T}^2.\vec{u}^1\,dS}$$

Preuve : En appliquant le T. T. V. pour l'état d'équilibre (1) avec le champ de déplacements $\vec{u}^2$, on obtient :

$$\int_D \overline{\overline{\sigma}}^1 : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^2)dv = \int_D \vec{f}^1 .\vec{u}^2 dv + \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}}^1 .\vec{n}).\vec{u}^2 \, dS = \int_D \vec{f}^1 .\vec{u}^2 dv + \int_{\partial D} \vec{T}^1 .\vec{u}^2 \, dS .$$

En appliquant le T. T. V. pour l'état d'équilibre (2) avec le champ de déplacements $\vec{u}^1$, on obtient :

$$\int_D \overline{\overline{\sigma}}^2 : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^1)dv = \int_D \vec{f}^2 .\vec{u}^1 dv + \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}}^2 .\vec{n}).\vec{u}^1 \, dS = \int_D \vec{f}^2 .\vec{u}^1 dv + \int_{\partial D} \vec{T}^2 .\vec{u}^1 \, dS .$$

Or chacune des solutions ($\overline{\overline{\sigma}}^1, \vec{u}^1$), ($\overline{\overline{\sigma}}^2, \vec{u}^2$) vérifie la loi de comportement élastique linéaire :

$\overline{\overline{\sigma}}^1 = \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^1)$, $\overline{\overline{\sigma}}^2 = \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^2)$, et comme le tenseur $\overline{\overline{\overline{R}}}$ est symétrique, alors :

$$\overline{\overline{\sigma}}^1 : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^2) = \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^2) : \overline{\overline{\sigma}}^1 = \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^2) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^1) = \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^1) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^2) = \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^1) : \overline{\overline{\sigma}}^2 = \overline{\overline{\sigma}}^2 : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}^1)$$

D'où le résultat annoncé.

e) Théorème du minimum de l'énergie potentielle :

Enoncé: Parmi tous les champs C.A, le champ de déplacements $\vec{u}$, solution du problème de l'équilibre élastique linéarisé, minimise la fonctionnelle énergie potentielle.

$$\boxed{\forall \hat{\vec{u}} \ C.C.A \quad On\ a : E_p(\vec{u}) \leq E_p(\hat{\vec{u}})}$$

Preuve : Soit $\vec{u}$ le champ de déplacements, solution du problème de l'équilibre élastique linéarisé et $\hat{\vec{u}}$ un C. C. A. pour le même problème, on a :

$$E_p(\hat{\vec{u}}) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}})\, dv - \Big(\int_D \vec{f}.\hat{\vec{u}}\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d .\hat{u}_i \, dS\Big)$$

$$E_p(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv - \Big(\int_D \vec{f}.\vec{u}\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d .u_i \, dS\Big)$$

$$E_p(\hat{\vec{u}}) - E_p(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) - \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})dv - \Big(\int_D \vec{f}.(\hat{\vec{u}} - \vec{u})\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d .(\hat{u}_i - u_i)\, dS\Big)$$

L'application du T. T. V. avec le champ de contraintes solution $\overline{\overline{\sigma}}$ et le champ de déplacements, $(\hat{\vec{u}} - \vec{u})$ permet d'obtenir :

$$\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}} - \vec{u})dv = \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \big(\overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) - \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\big)dv = \int_D \vec{f}.(\hat{\vec{u}} - \vec{u})dv + \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}).(\hat{\vec{u}} - \vec{u})dS$$

Comme $\overline{\overline{\sigma}}$ est ici le champ de contraintes solution, alors il vérifie les conditions aux limites de type effort :

$\sigma_{ij}\, n_j = T_i^d$ sur S_{fi} pour $i = 1, 2, 3$.

Comme $\hat{\vec{u}}$ et $\vec{u}$ sont des C. C. A. alors ils vérifient les conditions aux limites de type déplacement :

$\hat{u}_i = u_i^d$, $u_i = u_i^d$, sur S_{u_i} pour $i = 1, 2, 3$.

$\hat{\vec{u}}$ et $\vec{u}$ vérifient donc la condition $\hat{u}_i - u_i = 0$ sur S_{u_i} pour $i = 1, 2, 3$.

Ainsi en décomposant l'intégrale de surface sur ∂D on obtient : $\int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}).(\hat{\vec{u}} - \vec{u})\, dS = \sum_i \int_{Sfi} T_i^d .(\hat{u}_i - u_i)\, dS$

et $$\int_D \vec{f}.(\hat{\vec{u}} - \vec{u})\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d .(\hat{u}_i - u_i)\, dS = \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \big(\overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) - \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\big)dv = \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})dv$$

$$= \int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) - \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})dv$$

et donc : $$E_p(\hat{\vec{u}}) - E_p(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) + \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) - 2\overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_D \big(\overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) - \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\big) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \big(\overline{\overline{\varepsilon}}(\hat{\vec{u}}) - \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\big)dv \geq 0$$ puisque $\overline{\overline{\overline{R}}}$ est défini positif.

D'où le résultat annoncé.

f) Théorème du minimum de l'énergie complémentaire :

Enoncé: Parmi tous les champs S.A, le champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$, solution du problème de l'équilibre élastique linéarisé, minimise la fonctionnelle énergie complémentaire.

$$\boxed{\forall \hat{\overline{\overline{\sigma}}} \ C.S.A \quad On\ a : E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) \leq E_c\left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}}\right)}$$

Preuve : Soit $\overline{\overline{\sigma}}$ le champ de contraintes, solution du problème de l'équilibre élastique linéarisé et $\hat{\overline{\overline{\sigma}}}$ un C. S. A. pour le même problème, on a :

$$E_c\left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \hat{\overline{\overline{\sigma}}}\, dv - \sum_i \int_{Sui} u_i^d . \hat{\sigma}_{ij} n_j\, dS\ ,\ E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\, dv - \sum_i \int_{Sui} u_i^d . \sigma_{ij} n_j\, dS$$

$$E_c\left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}}\right) - E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \hat{\overline{\overline{\sigma}}} - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\, dv - \sum_i \int_{Sui} u_i^d . \left(\hat{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}\right) n_j\, dS$$

L'application du T. T. V. avec les champs solutions ($\overline{\overline{\sigma}}$, $\vec{u}$), puis avec les champs ($\hat{\overline{\overline{\sigma}}}$, $\vec{u}$), permet d'obtenir:

$$\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv = \int_D \vec{f} . \vec{u}\, dv + \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}} . \vec{n}) . \vec{u}\, dS = \int_D \vec{f} . \vec{u}\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d . u_i\, dS + \sum_i \int_{Sui} u_i^d . \sigma_{ij} n_j\, dS$$

$$\int_D \hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv = \int_D \vec{f} . \vec{u}\, dv + \int_{\partial D} (\hat{\overline{\overline{\sigma}}} . \vec{n}) . \vec{u}\, dS = \int_D \vec{f} . \vec{u}\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d . u_i\, dS + \sum_i \int_{Sui} u_i^d . \hat{\sigma}_{ij} n_j\, dS$$

d'où : $\int_D \left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}} - \overline{\overline{\sigma}}\right) : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv = \sum_i \int_{Sui} u_i^d . \left(\hat{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}\right) n_j\, dS$ et

$$E_c\left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}}\right) - E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \hat{\overline{\overline{\sigma}}} - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\, dv - \int_D \left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}} - \overline{\overline{\sigma}}\right) : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_D \hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \hat{\overline{\overline{\sigma}}} - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\, dv - \int_D \hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_D \hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \hat{\overline{\overline{\sigma}}} + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}} - 2\hat{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\, dv \quad \left(\text{puisque } \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) = \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_D \left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}} - \overline{\overline{\sigma}}\right) : \overline{\overline{\overline{S}}} : \left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}} - \overline{\overline{\sigma}}\right) dv \geq 0$$ car $\overline{\overline{\overline{S}}}$ est défini positif. D'où le résultat annoncé.

g) Théorème d'encadrement :

Enoncé: Les solutions ($\overline{\overline{\sigma}}, \vec{u}$) du problème de l'équilibre élastique linéarisé vérifient :

$$\boxed{\forall \hat{\vec{u}} \ C.C.A \ et\ \forall \hat{\overline{\overline{\sigma}}} \ C.S.A \ \ On\ a : \ -E_c\left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}}\right) \leq -E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = E_p\left(\vec{u}\right) \leq E_p\left(\hat{\vec{u}}\right)}$$

Preuve : Les inégalités $-E_c\left(\hat{\overline{\overline{\sigma}}}\right) \leq -E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)$ et $E_p\left(\vec{u}\right) \leq E_p\left(\hat{\vec{u}}\right)$ découlent directement du théorème du minimum de l'énergie complémentaire et du théorème du minimum de l'énergie potentielle. Il reste donc à montrer l'égalité $-E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = E_p\left(\vec{u}\right)$ ou encore $E_p\left(\vec{u}\right) + E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = 0$.

On a :

$$E_p\left(\vec{u}\right) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv - \left(\int_D \vec{f} . \vec{u}\, dv + \sum_i \int_{Sfi} T_i^d . u_i\, dS\right)$$

$$E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\, dv - \sum_i \int_{Sui} u_i^d . \sigma_{ij} n_j\, dS$$

$$E_p\left(\vec{u}\right) + E_c\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) : \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv + \frac{1}{2}\int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\, dv - \int_D \vec{f} . \vec{u}\, dv - \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}} . \vec{n}) . \vec{u}\, dS$$

$$= \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u})\, dv - \int_D \vec{f} . \vec{u}\, dv - \int_{\partial D} (\overline{\overline{\sigma}} . \vec{n}) . \vec{u}\, dS \quad \left(\text{puisque } \overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{R}}} : \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) \text{ et } \overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{u}) = \overline{\overline{\overline{S}}} : \overline{\overline{\sigma}}\right)$$

$= 0$ par application du théorème des travaux virtuels avec les champs ($\overline{\overline{\sigma}}, \vec{u}$).