Rappels de mathématiques sur le calcul indiciel, vectoriel et tensoriel

1. Calcul indiciel et vectoriel:

L'espace de la mécanique des milieux continus est modélisé par un espace affine $\mathcal{P}_3$ de dimension 3. On associe à cet espace affine l'espace vectoriel euclidien E_3. On désigne par $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base Orthonormée de E_3.

➢ **Indice franc – indice muet – convention d'Einstein :**

Soit $\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3$ un vecteur de E_3.

Dans le terme (V_i), l'indice i peut prendre une valeur quelconque (1, 2 ou 3) mais fixée : c'est un indice franc.

Dans l'expression : $\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i\vec{e}_i$, i est un indice muet.

La convention d'Einstein consiste à alléger l'écriture en omettant le symbole $\sum$.

On écrira : $\vec{V} = V_i\vec{e}_i = V_j\vec{e}_j$.

Sauf mention du contraire, chaque fois qu'un indice se répète dans un monôme, on considère que c'est une sommation sur toutes les valeurs possibles de cet indice.
Exemple si [A] est une matrice carrée 3x3 de composantes A_{ij}, alors : $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ =trace([A]).

➢ **Notation des dérivées partielles :**

Soit f une fonction scalaire des coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3.

Pour alléger les écritures on notera $f_{,i}$ la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Exemple :

Si $f = f(x_1,x_2,x_3)$ alors : $f_{,1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $f_{,12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Si $\vec{V} = \vec{V}(x_1,x_2,x_3)$ alors : $V_{i,j} = \dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}$ et $V_{i,i} = \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3}$

➢ **Symboles de Kronecker :** $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Avec la convention d'Einstein on obtient : $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

➢ **Symboles de permutation :**

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation directe de } (1,2,3) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation indirecte de } (1,2,3) \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On montre que :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} ; \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} ; \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

- **Produit scalaire :**

Soient $\vec{V} = V_i \vec{e}_i$ et $\vec{W} = W_i \vec{e}_i$ deux vecteurs de E_3.

$$\vec{V}.\vec{W} = V_i W_i$$

- **Produit vectoriel :**

Si $\vec{X} = \vec{V} \wedge \vec{W}$ avec $\vec{X} = X_i \vec{e}_i$ alors $X_i = \varepsilon_{ijk} V_j W_k$

$X_1 = \varepsilon_{1jk} V_j W_k = \underbrace{\varepsilon_{123}}_{1} V_2 W_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1} V_3 W_2$

- **Produit mixte :**

$$\left(\vec{X},\vec{V},\vec{W}\right) = \vec{X}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \varepsilon_{ijk} X_i V_j W_k$$

<u>Remarques</u> :

$$\left(\vec{X},\vec{V},\vec{W}\right) = \begin{vmatrix} X_1 & V_1 & W_1 \\ X_2 & V_2 & W_2 \\ X_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix} \; ; \qquad (\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk}$$

- **Produit matrice -vecteur :**

Si $\vec{Y} = [A].\vec{X}$ alors $Y_i = A_{ij}.X_j$

- **Produit matrice -matrice :**

Si $[C] = [A].[B]$ alors $C_{ij} = A_{ik}.B_{kj}$

- **Déterminant d'une matrice carrée 3x3 :**
  - $\varepsilon_{ijk} \det[A] = \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp}$
  - $\det[A] = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp} = \varepsilon_{mnp} A_{1m} A_{2n} A_{3p}$

- **Inversion d'une matrice carrée 3x3 :**

Si $[B] = [A]^{-1}$ alors $B_{ji} = \dfrac{1}{2\det[A]} \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jpq} A_{mp} A_{nq}$

2. Calcul tensoriel :

a) Tenseur d'ordre *p* sur E_3

- **Définition :** On appelle tenseur d'ordre p sur E_3 toute forme multilinéaire sur $(E_3)^p$, c'est-à-dire toute application de $(E_3)^p$ dans IR qui est linéaire par rapport à chacun de ses p arguments. L'espace des tenseurs d'ordre p sur E_3 est noté : $\otimes_p E_3$

Si $T \in \otimes_p E_3$ alors l'application :

$$T : \begin{array}{ccc} (E_3)^p & \rightarrow & \text{IR} \\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p) & \rightarrow & T(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p) \end{array}$$

est linéaire par rapport à chaque $\vec{v}_i$ $(i = 1..p)$

b) Tenseur d'ordre *1* sur E_3

- **Définition :** Un tenseur d'ordre 1 sur E_3 est une forme linéaire sur E_3.

Les composantes dans la base orthonormée $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ d'un tenseur $\overline{T}$ d'ordre 1 sont définies par :

$T_i = \overline{T}(\vec{e}_i)$

Soit $\vec{V}=V_i\vec{e}_i$ un vecteur de E_3. On a $\overline{T}(\vec{V})=\overline{T}(V_i\vec{e}_i)=V_i.\overline{T}(\vec{e}_i)=V_i.T_i$,

Comme $V_i=\vec{V}.\vec{e}_i$ alors $\overline{T}(\vec{V})=(\vec{V}.\vec{e}_i)T_i=(T_i\vec{e}_i).\vec{V}$. En posant $\vec{T}=T_i\vec{e}_i$, on obtient : $\overline{T}(\vec{V})=\vec{T}.\vec{V}$

Si on identifie la forme linéaire $\overline{T}$ et le vecteur $\vec{T}$ on peut dire que les tenseurs d'ordre 1 sur E_3 ne sont autres que les vecteurs de E_3.

c) Tenseur d'ordre 2 sur E_3

➤ **Définition :**

Un tenseur d'ordre 2 sur E_3 est une forme bilinéaire sur E_3. On appelle composantes dans la base B d'un tenseur $\overline{\overline{T}}$ d'ordre 2, les quantités T_{ij} définies par : $T_{ij}=\overline{\overline{T}}(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$.

Soient $\vec{V}=V_i\vec{e}_i$ et $\vec{W}=W_i\vec{e}_i$ deux vecteurs de E_3. D'après la bilinéarité de $\overline{\overline{T}}$ On a :

$$\overline{\overline{T}}(\vec{V},\vec{W})=T_{ij}V_iW_j$$

Au tenseur $\overline{\overline{T}}$ on peut associer dans la base B une matrice carrée $[T]$ dont les composantes sont les T_{ij}.

On pourra écrire : $\overline{\overline{T}}(\vec{V},\vec{W})=\vec{V}.[T].\vec{W}$

Remarque : Les composantes de $\vec{V}$, $\vec{W}$ et $[T]$ dépendent de la base considérée par contre le scalaire $\overline{\overline{T}}(\vec{V},\vec{W})$ en est indépendant.

➤ **Application linéaire associée à un tenseur d'ordre 2 :**

Tout tenseur d'ordre 2 $\overline{\overline{T}}$ défini une application linéaire de E_3 sur E_3 qui fait correspondre à tout vecteur $\vec{X}$ de E_3 un vecteur $\vec{Y}$ de E_3 tel que dans une base B donnée on a : $\vec{Y}=[T].\vec{X}$; $Y_i=T_{ij}X_j$

➤ **Tenseur métrique ou tenseur unité:**

On appelle tenseur métrique de E_3 le tenseur d'ordre 2 noté $\overline{\overline{I}}$ défini par :

$$\overline{\overline{I}}:\ E_3\text{x}\,E_3 \to \text{IR}$$
$$(\vec{V},\vec{W}) \to \vec{V}.\vec{W}$$

Les composantes dans la base B du tenseur métrique sont : $I_{ij}=\vec{e}_i.\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$

La matrice [I] associée au tenseur métrique est la matrice identité et ceci dans toute base orthonormée.

➤ **Transposé d'un tenseur du second ordre:**

On définit le tenseur transposé d'un tenseur du second ordre $\overline{\overline{T}}$ (noté $\overline{\overline{T}}^T$) par :

$$\overline{\overline{T}}^T(\vec{V},\vec{W})=\overline{\overline{T}}(\vec{W},\vec{V}) \qquad \forall(\vec{V},\vec{W})\in E_3\text{x}\,E_3$$

Dans une base orthonormée on a : $T^T_{ij}=\overline{\overline{T}}^T(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\overline{\overline{T}}(\vec{e}_j,\vec{e}_i)=T_{ji}$.

➤ **Tenseur du second ordre symétrique:**

Un tenseur du second ordre est symétrique s'il est identique à son transposé : $\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{T}}^T$

Dans une base orthonormée on a : $T_{ij}=T_{ji}$

➤ **Tenseur du second ordre antisymétrique:**

Un tenseur du second ordre est antisymétrique s'il est égal à l'opposé de son transposé : $\overline{\overline{T}}=-\overline{\overline{T}}^T$

Dans une base orthonormée on a : $T_{ij}=-T_{ji}$

➤ **Décomposition d'un tenseur du second ordre en tenseurs symétrique et antisymétrique:**

Tout tenseur du second ordre $\overline{\overline{T}}$ peut se décomposer de façon unique en la somme d'un tenseur symétrique $\overline{\overline{T}}^S$ et d'un tenseur antisymétrique $\overline{\overline{T}}^A$:

$\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{T}}^S+\overline{\overline{T}}^A$ avec $\overline{\overline{T}}^S=\frac{1}{2}\left(\overline{\overline{T}}+\overline{\overline{T}}^T\right)$ et $\overline{\overline{T}}^A=\frac{1}{2}\left(\overline{\overline{T}}-\overline{\overline{T}}^T\right)$

➢ **Vecteur dual d'un tenseur du second ordre antisymétrique:**

A tout tenseur antisymétrique $\overline{\overline{A}}$ on peut associer un vecteur $\vec{A}$ dit dual du tenseur $\overline{\overline{A}}$ tel que :

$$\forall \vec{V} \in E_3 \qquad [A].\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{V}$$

Dans une base orthonormée on a : $A_{ij} = -\varepsilon_{ijk} A_k$ et $A_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} A_{jk}$

➢ **Invariants d'un tenseur du second ordre:**

Les invariants d'un tenseur du second ordre sont des fonctions indépendantes de la base choisie.

Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur du second ordre, on appelle invariants principaux notés I_I, I_{II}, I_{III}, les coefficients du polynôme caractéristique en λ : $P(\lambda) = \det([T] - \lambda[I])$

On montre que : $P(\lambda) = -\lambda^3 + I_I\lambda^2 + I_{II}\lambda + I_{III}$.

Avec
$$\begin{cases} I_I = trace([T]) = T_{ii} \\ I_{II} = \frac{1}{2}\left(trace([T])^2 - trace([T]^2)\right) = \frac{1}{2}(T_{ii}.T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \\ I_{III} = \det[T] \end{cases}$$

Il est courant en mécanique d'utiliser à la place des invariants principaux les trois invariants indépendants suivants :

$$\begin{cases} I_1 = I_I = trace([T]) \\ I_2 = \frac{1}{2} trace([T]^2) \\ I_3 = \frac{1}{3} trace([T]^3) \end{cases}$$

➢ **Valeurs propres – Vecteurs propres:**

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre $\overline{\overline{T}}$ sont les racines du polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \det([T] - \lambda[I])$.

On appelle vecteurs propres du tenseur $\overline{\overline{T}}$ tout vecteur $\vec{p}$ non nul tel que : $[T].\vec{p} = \lambda.\vec{p}$

Où λ est une valeur propre de $\overline{\overline{T}}$.

Remarques :

- Si $\overline{\overline{T}}$ est un tenseur symétrique sur IR^3 alors ses trois valeurs propres sont réelles.
- Si les trois valeurs propres d'un tenseur $\overline{\overline{T}}$ sont identiques, le tenseur $\overline{\overline{T}}$ est dit sphérique. Il s'écrit alors $\overline{\overline{T}} = \lambda.\overline{\overline{I}}$, où λ est la valeur commune des trois valeurs propres.

d) Changement de base

Soient $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $B'(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ deux bases orthonormées de E_3, avec : $\vec{e}_i' = Q_{ij}.\vec{e}_j$.

La matrice $[Q]$ de composantes Q_{ij} est la matrice de passage de la base B' à la base B.

Comme B et B' sont orthonormées alors la matrice $[Q]$ est orthogonale :

$$[Q].[Q]^T = [I] \text{ ou } [Q]^{-1} = [Q]^T$$

➢ **Changement de base pour un vecteur:**

Pour un vecteur de E_3 tel que : $\vec{V} = V_j \vec{e}_j = V_i' \vec{e}_i'$, on obtient :

$$V_i' = Q_{ij}.V_j \qquad \text{ou encore} \qquad V_{|B'} = [Q].V_{|B}$$

Dém.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}=V_j\,\vec{e}_j\\ \vec{e}_j=Q^T_{ji}\,\vec{e}_i'\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{V}=V_j\,Q^T_{ji}\,\vec{e}_i'=\underbrace{Q_{ij}V_j}_{V_i'}\,\vec{e}_i'$$

- **Changement de base pour un tenseur du second ordre:**

Pour un tenseur du second ordre $\overline{\overline{T}}$ de composantes T_{ij} dans B et T_{ij}' dans B' on obtient :

$$T_{ij}'=Q_{ik}.Q_{jl}.T_{kl} \qquad \Leftrightarrow \qquad [T]_{|B'}=[Q].[T]_{|B}.[Q]^T$$

Dém.

$$\left.\begin{array}{l}T_{ij}'=\overline{\overline{T}}(\vec{e}'_i,\vec{e}_j')\\ \vec{e}_i'=Q_{ik}.\vec{e}_k\\ \vec{e}_j'=Q_{jl}.\vec{e}_l\end{array}\right\}\Rightarrow T_{ij}'=\overline{\overline{T}}(Q_{ik}.\vec{e}_k,Q_{jl}.\vec{e}_l)=Q_{ik}Q_{jl}\overline{\overline{T}}(\vec{e}_k,\vec{e}_l)=Q_{ik}Q_{jl}T_{kl}$$

- **Changement de base pour un tenseur d'ordre p:**

Pour un tenseur T d'ordre p de composantes $T_{i_1 i_2 \dots i_p}$ dans B et $T'_{i_1 i_2 \dots i_p}$ dans B' on obtient :

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_p}=Q_{i_1 j_1}.Q_{i_2 j_2}\dots Q_{i_p j_p}.T_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

e) Produit tensoriel

- Le produit tensoriel de deux tenseurs R et S d'ordre respectivement p et q est le tenseur T d'ordre $p+q$ défini par :

$$T(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_{p+q})=R(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p).S(\vec{v}_{p+1},\vec{v}_{p+2},\dots,\vec{v}_{p+q})$$

Le tenseur produit est noté : $T=R\otimes S$.

Les composantes de T dans une base orthonormée s'obtiennent en fonction de celles de R et S par :

$$T_{i_1 i_2 \dots i_{p+q}}=R_{i_1 i_2 \dots i_p}.S_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+q}}$$

Le produit tensoriel de k tenseurs T^1, T^2, ... T^k est le tenseur défini par :

$$T=T^1\otimes T^2\otimes \dots T^{k-1}\otimes T^k=T^1\otimes (T^2(\otimes \dots (T^{k-1}\otimes T^k)))$$

Le produit tensoriel est associatif.

f) Base de l'espace des tenseurs d'ordre p sur E_3

On définit la somme de deux tenseurs d'ordre p et le produit d'un tenseur d'ordre p par un réel de façon analogue à la somme de deux applications de $(E_3)^p$ dans IR et au produit par un réel d'une application de $(E_3)^p$ dans IR. Ainsi l'ensemble des tenseurs d'ordre p sur E_3 forme un espace vectoriel de dimension 3^p. La famille ($\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}_{i_2}\otimes\dots\otimes\vec{e}_{i_p}$ où $i_k\in\{1,2,3\}$), associée à la base orthonormée $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, constitue une base de l'espace des tenseurs d'ordre p sur E_3.

Exemples :

- Tenseur d'ordre 1 : $\overline{T}=T_i\,\vec{e}_i$ (3 composantes)
- Tenseur d'ordre 2 : $\overline{\overline{T}}=T_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ (9 composantes)
- Tenseur d'ordre 3 : $\overline{\overline{\overline{T}}}=T_{ijk}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k$ (27 composantes)
- Tenseur d'ordre 4 : $\overline{\overline{\overline{\overline{T}}}}=T_{ijkl}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l$ (81 composantes)
- Produit tensoriel de deux tenseurs :

Si $\overline{\overline{R}}=R_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ (p=2) et $\overline{S}=S_k\,\vec{e}_k$ (q=1) alors

$$\overline{\overline{\overline{T}}}=\overline{\overline{R}}\otimes\overline{S}=R_{ij}\,S_k\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k=T_{ijk}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k$$

g) Contraction d'un tenseur selon deux indices

Soit T un tenseur d'ordre $p \geq 2$, le tenseur contracté de T par rapport à ces deux derniers indices, noté T^C, est le tenseur d'ordre *p-2* défini par :

$$T^c(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p-2}) = \sum_{k=1}^{3} T(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p-2}, \vec{e}_k, \vec{e}_k)$$

Ses composantes sont : $T^c_{i_1 i_2 \ldots i_{p-2}} = T_{i_1 i_2 \ldots i_{p-2} kk}$

<u>Exemples</u> **:**

- Contraction d'un tenseur d'ordre 3:

$\overline{\overline{\overline{T}}} = T_{ijk}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \quad \Rightarrow \quad \overline{\overline{\overline{T}}}^c = T_{ijj}\, \vec{e}_i$

<u>Remarque</u> : pour obtenir le tenseur contracté il suffit de remplacer le dernier produit tensoriel des vecteurs de la base par leur produit scalaire. (Dans l'exemple précédent on a remplacé $\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$ par $\vec{e}_j . \vec{e}_k = \delta_{jk}$)

- Contraction d'un tenseur d'ordre 2:

$\overline{\overline{T}} = T_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad \overline{\overline{T}}^c = T_{ii} = \text{trace}(\overline{\overline{T}})$

<u>Remarque</u> : par convention on considérera qu'un scalaire est un tenseur d'ordre *0*.

h) Produit contracté de deux tenseurs

Le produit contracté de deux tenseurs R et S d'ordre respectivement p et q est le tenseur T (on note $T=R\,.S$) d'ordre $p+q-2$ défini par :

$$T(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p+q-2}) = \sum_{k=1}^{3} R(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p-1}, \vec{e}_k).S(\vec{e}_k, \vec{v}_p, \ldots, \vec{v}_{p+q-2})$$

Les composantes de T dans une base orthonormée s'obtiennent en fonction de celles de R et S par :

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_{p+q-2}} = R_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} k} . S_{k i_p \ldots i_{p+q-2}} \quad \text{(avec sommation sur } k \in \{1,2,3\})$$

<u>Exemples</u> **:**

- Si $\overline{\overline{R}} = R_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ ($p=2$) et $\overline{S} = S_k\, \vec{e}_k$ ($q=1$) alors $T = R \bullet S = R_{ij} S_j\, \vec{e}_i$

Le produit contracté d'un tenseur du second ordre et d'un vecteur n'est autre que le produit de la matrice associée au tenseur par le vecteur.

<u>Remarque</u> : pour obtenir le produit contracté de deux tenseurs il suffit de calculer leur produit tensoriel et de remplacer dans ce dernier le produit tensoriel $\vec{e}_{i_p} \otimes \vec{e}_{i_{p+1}}$ par le produit scalaire $\vec{e}_{i_p} . \vec{e}_{i_{p+1}}$.

- Si $\overline{\overline{R}} = R_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ ($p=2$) et $\overline{\overline{S}} = S_{kl}\, \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ ($q=2$) alors $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{R}} \bullet \overline{\overline{S}} = R_{ij} S_{jl}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l$

La matrice associée au produit contracté de deux tenseurs du second ordre n'est autre que le produit des matrices associées à chacun des tenseurs.

<u>Cas particulier</u> : Si $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{I}} = \delta_{kl}\, \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ alors $\overline{\overline{R}} \bullet \overline{\overline{I}} = R_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{I}} \bullet \overline{\overline{R}}$

- Si $\overline{R} = R_i\, \vec{e}_i$ ($p=1$) et $\overline{S} = S_j\, \vec{e}_j$ ($q=1$) alors $T = R \bullet S = R_i S_i$

Le produit contracté de deux vecteurs n'est autre que leur produit scalaire.

i) Produit doublement contracté de deux tenseurs

Le produit doublement contracté de deux tenseurs R et S d'ordre respectivement $p \geq 2$ et $q \geq 2$ est le tenseur T (on note $T=R:S$) d'ordre $p+q-4$ défini par :

$$T(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p+q-4}) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} R(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{p-2}, \vec{e}_k, \vec{e}_l).S(\vec{e}_l, \vec{e}_k, \vec{v}_{p-1}, \ldots, \vec{v}_{p+q-4})$$

Les composantes de T dans une base orthonormée s'obtiennent en fonction de celles de R et S par :

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_{p+q-4}} = R_{i_1 i_2 \ldots i_{p-2} kl} . S_{lk i_{p-1} \ldots i_{p+q-4}} \quad \text{(avec sommation sur } k,l \in \{1,2,3\})$$

Exemples :

- Si $\overline{\overline{R}} = R_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ (*p*=2) et $\overline{\overline{S}} = S_{kl}\,\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ (*q*=2) alors

$$T = \overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} = R_{ij} S_{ji} = trace(\overline{\overline{R}} \bullet \overline{\overline{S}}) = trace(\overline{\overline{S}} \bullet \overline{\overline{R}})$$

Si $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{I}} = \delta_{kl}\,\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ alors $\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{I}} = R_{ii} = trace(\overline{\overline{R}}) = \overline{\overline{I}} : \overline{\overline{R}}$

- Si $\overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} = R_{ijkl}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ (*p*=4) et $\overline{\overline{S}} = S_{mn}\,\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$ (*q*=2) alors

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{\overline{\overline{R}}}} : \overline{\overline{S}} = R_{ijkl} S_{lk}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

3. Analyse tensorielle :

a) Les opérateurs différentiels

Les tenseurs (scalaires, vecteurs, ou tenseurs d'ordre supérieur ou égal à deux) qui interviennent en mécanique des milieux continus sont en général fonctions de l'espace et du temps : on parle dans ce cas de champs tensoriels.
La dérivation de ces champs par rapport aux variables d'espace conduit à l'introduction d'opérateurs aux dérivées partielles tels que le gradient, la divergence, le laplacien, le rotationnel ...
Toutes les fonctions considérées sont supposées suffisamment régulières.

Soit $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un repère cartésien orthonormé et $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ la base associée. On désigne par $\vec{x}$ la variable spatiale : si *M* est un point de l'espace affine $\mathcal{P}_3$, on note $\overrightarrow{OM} = \vec{x} = x_i\,\vec{e}_i$. Le domaine de variation de *M* est supposé être un domaine tridimensionnel de $\mathcal{P}_3$.

- **Gradient d'un champ scalaire :**

Soit *f* une fonction scalaire des coordonnées de *M*. On définit le champ vectoriel $\overrightarrow{grad}\, f$ en *M* par la relation : $df = \left(\overrightarrow{grad}\, f\right)\overrightarrow{dx}$ où $\overrightarrow{dx} = dx_i\,\vec{e}_i$.

Comme $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dfrac{\partial f}{\partial x_3}dx_3$, on obtient les composantes de $\overrightarrow{grad}\, f$ dans la base cartésienne *B* :

$$\boxed{\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\vec{e}_3 = f_{,i}\,\vec{e}_i}$$

On note parfois $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f$

- **Gradient d'un champ vectoriel :**

Soit $\vec{V}$ une fonction vectorielle des coordonnées de *M*. On définit le champ tensoriel $\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}$ au point *M* par la relation : $\overrightarrow{dV} = \left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}\right).\overrightarrow{dx}$

Dans la base orthonormée *B* on a :

$$\left[\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}\right]_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = V_{i,j} \qquad \boxed{\overline{\overline{grad}}\,\vec{V} = V_{i,j}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}$$

La matrice associée dans *B* est : $\left[\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}\right] = \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & V_{1,3} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & V_{2,3} \\ V_{3,1} & V_{3,2} & V_{3,3} \end{pmatrix}$.

- **Gradient d'un champ tensoriel du second ordre :**

Le gradient d'un champ tensoriel du second ordre $\overline{\overline{T}}$ est le champ tensoriel du troisième ordre $\overline{\overline{\overline{grad}}}(\overline{\overline{T}})$ défini en coordonnées cartésiennes par : $\boxed{\overline{\overline{\overline{grad}}}(\overline{\overline{T}}) = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k}$

- **Divergence d'un champ vectoriel :**

On appelle divergence d'un champ vectoriel $\vec{V}$, le champ scalaire tel que : $\boxed{div(\vec{V}) = trace\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}\right)}$

Dans la base orthonormée B on a : $\boxed{div(\vec{V}) = \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = V_{i,i}}$

- **Divergence d'un champ tensoriel du second ordre :**

La divergence d'un champ tensoriel du second ordre $\overline{\overline{T}}$ est le champ vectoriel obtenu en effectuant la contraction du champ tensoriel $\overline{\overline{\overline{grad}}}(\overline{\overline{T}})$ par rapport à ces deux derniers indices.

Dans la base orthonormée B on obtient : $\boxed{div(\overline{\overline{T}}) = T_{ij,j}\,\vec{e}_i}$

- **Laplacien d'un champ scalaire :**

On appelle Laplacien d'un champ scalaire f et on note Δf, le champ scalaire : $\boxed{\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)}$

En coordonnées cartésiennes on obtient : $\boxed{\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = f_{,ii}}$

- **Laplacien d'un champ vectoriel :**

On appelle Laplacien d'un champ vectoriel $\vec{V}$ et on note $\Delta\vec{V}$, le champ vectoriel :

$$\boxed{\Delta\vec{V} = div\left(\overline{\overline{grad}}\left(\vec{V}\right)\right)}$$

En coordonnées cartésiennes on obtient : $\boxed{\Delta\vec{V} = V_{i,jj}\,\vec{e}_i}$.

- **Rotationnel d'un champ vectoriel :**

On définit le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{V}$ par :

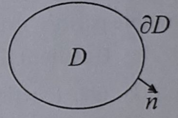
$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right)\wedge\vec{U} = \left(\overline{\overline{grad}}\left(\vec{V}\right) - \overline{\overline{grad}}\left(\vec{V}\right)^T\right)\bullet\vec{U} \qquad \forall\vec{U}\in E_3 .$$

En coordonnées cartésiennes le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{V}$ est donné par :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) = \varepsilon_{ijk}\,V_{k,j}\;\vec{e}_i}$$

b) Formules et théorèmes généraux sur les transformations d'intégrales

Soit D un domaine tridimensionnel borné de frontière ∂D suffisamment régulière. On désigne par $\vec{n}$ le champ des normales à ∂D unitaires et orientées vers l'extérieur de D.



- **Théorèmes de la divergence :**

Si $\overline{\overline{F}}$ est un champ tensoriel du second ordre suffisamment régulier sur D alors :

$$\boxed{\iiint_D div\left(\overline{\overline{F}}\right)dv = \iint_{\partial D}\overline{\overline{F}}.\vec{n}\,dS}$$

Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel suffisamment régulier sur D alors :

$$\boxed{\iiint_D div\left(\vec{F}\right)dv = \iint_{\partial D}\vec{F}.\vec{n}\,dS}$$

< Théorème d'Ostrogradski >

- **Formule du gradient :**

Si f est un champ scalaire suffisamment régulier sur D alors :

$$\boxed{\iiint_D \overrightarrow{grad}(f)\,dv = \iint_{\partial D} f.\vec{n}\,dS}$$

- **Théorème de l'intégrale nulle :**

$$\boxed{\iiint_{M\in d} f(M)\,dv = 0 \;\; \forall\, d\subset D \Leftrightarrow f(M) = 0 \;\; \forall\, M\in D}$$

Applications sur le calcul indiciel, vectoriel et tensoriel

Répondre aux questions suivantes en utilisant les notations et les définitions données dans le chapitre rappels de mathématiques.

1. En utilisant les coordonnées cartésiennes, démontrer les égalités suivantes :

- $div(f\vec{V}) = f\,div(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(f).\vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{V})) - \Delta\vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(f\vec{V}) = f\overrightarrow{rot}(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(f)\wedge\vec{V}$
- $div(\vec{V}\wedge\vec{W}) = \vec{W}.\overrightarrow{rot}(\vec{V}) - \vec{V}.\overrightarrow{rot}(\vec{W})$
- $\left(\overline{\overline{grad}}(\vec{V})\right)\vec{V} = \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}(V^2) + \overrightarrow{rot}(\vec{V})\wedge\vec{V}$

2. On désigne par (r,θ,z) les coordonnées cylindriques et par $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ la base orthonormée associée.

   On considère le champ vectoriel suivant : $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r$. On demande de calculer :

   - $div(\vec{u})$
   - $\overrightarrow{rot}(\vec{u})$
   - $\overline{\overline{grad}}(\vec{u})$, ses parties symétrique et antisymétrique.

3. Montrer que si $\overline{\overline{F}}$ est un tenseur du second ordre sur E_3 alors les tenseurs :

   $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \bullet \overline{\overline{F}}$ et $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{F}} \bullet \overline{\overline{F}}^T$ sont symétriques.

4. Démontrer les égalités suivantes :

   - $\overline{\overline{a}} : \left(\overline{\overline{b}} \bullet \overline{\overline{c}}\right) = \left(\overline{\overline{c}} \bullet \overline{\overline{a}}\right) : \overline{\overline{b}} = \left(\overline{\overline{a}} \bullet \overline{\overline{b}}\right) : \overline{\overline{c}}$
   - $\left(\overline{\overline{A}} \bullet \vec{a}\right) \bullet \left(\overline{\overline{B}} \bullet \vec{b}\right) = \vec{a} \bullet \left(\overline{\overline{A}}^T \bullet \overline{\overline{B}}\right) \bullet \vec{b}$

5. Montrer que si $\overline{\overline{\sigma}}$ est un tenseur du second ordre symétrique alors : $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}$

   où $\overline{\overline{D}}$ représente la partie symétrique de $\overline{\overline{L}}$.

6. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de chacun des tenseurs suivants:

   $\overline{\overline{R}} = \sigma\,\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$; $\overline{\overline{S}} = \alpha(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) + \beta(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3)$; $\overline{\overline{T}} = \tau(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)$