

Mécanique des Milieux Continus

Introduction

Partie I – Concepts généraux: *Déformations et Efforts intérieurs*

***/-1 Description lagrangienne du mvt des particules d'un MC
et tenseur de déformation***

Hatem ZENZRI, 2012

Introduction

Terminologie

Milieu Continu → Objet matériel 3D (fluide ou solide) étudié à une échelle macroscopique \gg Echelle atomique ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)

→ Les vides atomiques sont ignorés

Milieu Continu = Ensemble continu de particules (ou points matériels)

Particule = Plus petit constituant d'un MC,
contient un grand nombre d'atomes,
sa position est repérée par un point géométrique.

Introduction

Mécanique des Milieux Continus =

Cinématique des MC

Description des mouvements des points matériels sans se
préoccuper des causes de ces mouvements.

+

Dynamique des MC

Etude des relations entre les mouvements et leurs causes (les
forces)

Introduction

MMC = Méca. des Fluides et Méca. des Solides Déformables

Méca. des Solides Déformables →

Théorie pour l'ingénieur concepteur

Génie de la construction : MC= structures et ouvrages

Génie mécanique : MC = Pièces mécaniques

Conception :

Choix des matériaux et de la géométrie + **Dimensionnement**

Introduction

Dimensionnement =

Vérification de la raideur

Les déformations ne doivent pas entraver le service ;
calcul aux états limites de service (ELS).

+

Vérification de la résistance

Les efforts ne doivent pas provoquer la rupture ; calcul aux
états limites ultimes (ELU) .

➡ **Besoin du calcul des déformations et des efforts intérieurs**

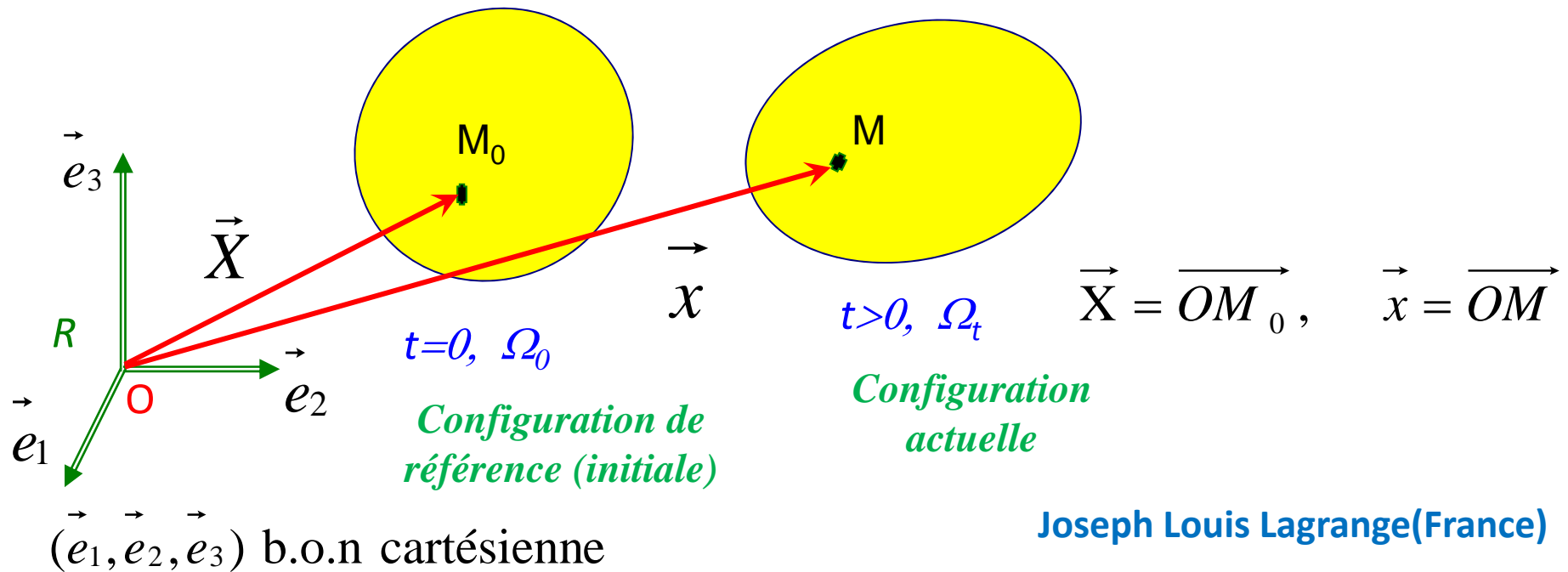
Partie I- Concepts généraux: *Déformations et Efforts intérieurs*

Plan

- Cinématique des Milieux Continus
 - Description lagrangienne du mvt des particules d'un MC -
Les déformations dans un MC
 - Description eulérienne du mvt des particules d'un MC – Taux ou vitesse de déformation
- Dynamique des Milieux Continus
 - Le principe fondamental de la dynamique (PFD)
 - Les efforts intérieurs dans un MC : Les contraintes de Cauchy
 - Equations locales de la Dynamique
 - Le principe des puissances virtuelles (PPV)
 - Etude pratique du tenseur des contraintes

Cinématique des Milieux Continus

Description lagrangienne du mvt des particules d'un MC



Description lagrangienne du mvt : $\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$, $\vec{X} = \vec{\phi}(\vec{X}, t = 0)$

Description matérielle ou par trajectoires : Les observateurs du mvt des particules sont rattachés à ces particules

Description lagrangienne du mvt :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad , \quad \vec{X} = \vec{\phi}(\vec{X}, t = 0)$$

$\vec{\phi}$: **Transformation de Milieu Continu**

\mathcal{C}^2 / t

\mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 (par morceaux) / \underline{X}

$$\forall t \quad \vec{\phi}(\cdot, t): \vec{X} \rightarrow \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

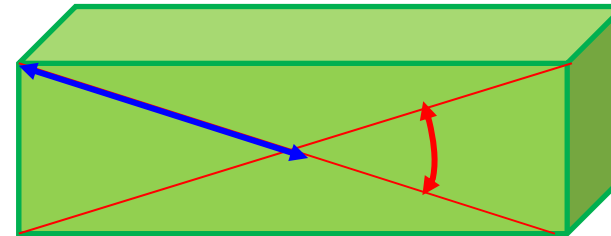
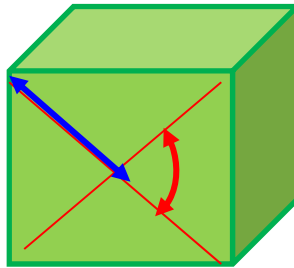
Bijection de Ω_0 vers Ω_t
(et donc difféomorphisme)

Etude des déformations

Un MC se déforme



Variation des dimensions et / ou de la forme



Variation des distances entre les particules
et / ou les angles entre les vecteurs matériels.

Etude des déformations : Etude des changements de distance
et d'angle au voisinage d'une particule

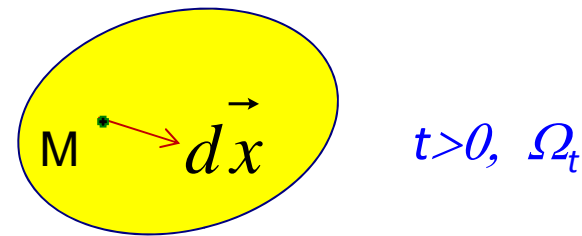
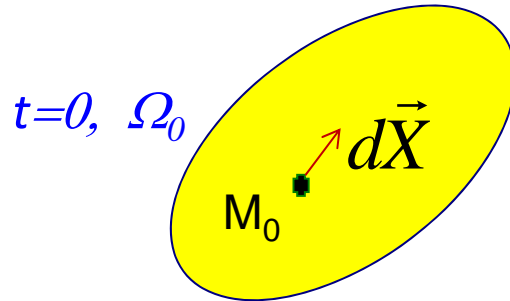
Etude locale : Etude du **Gradient de la transformation**

Gradient de la transformation

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \Rightarrow$$

$$d\vec{x} = \underline{\underline{\nabla \vec{\phi}}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}$$

Formule du transport convectif d'un vecteur matériel élémentaire

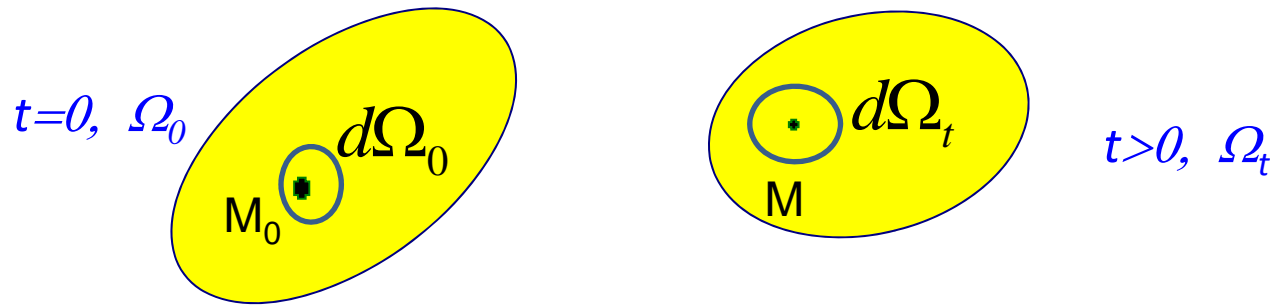


Dans la b.o.n cartésienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\underline{\underline{(\nabla \vec{\phi})}}_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j}$

$$\underline{\underline{[\nabla \vec{\phi}]}(\vec{X}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\nabla \vec{\phi}}}(\vec{X}, t=0) = \underline{\underline{\delta}}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$



$$d\Omega_t = \det(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t)) \cdot d\Omega_0$$

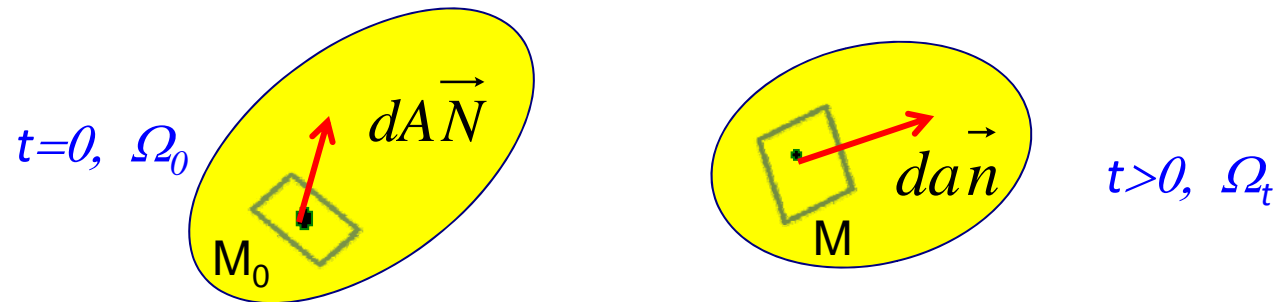
Formule du transport convectif d'un volume matériel élémentaire

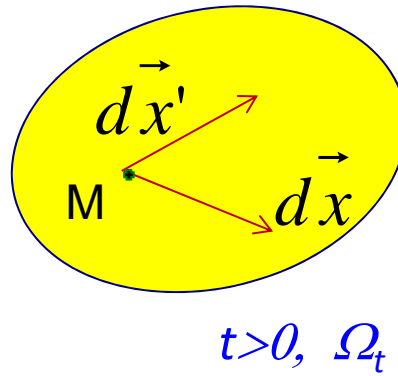
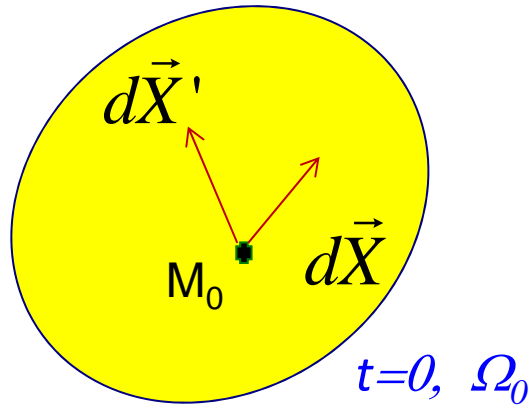
$$0 < J(\vec{X}, t) = \det(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t)) < +\infty$$

$J(\vec{X}, t)$: dilatation volumique en (\vec{X}, t)

$$da \vec{n} = J(\vec{X}, t)^t \left[\underline{\underline{\nabla \phi(\vec{X}, t)}} \right]^{-1} \cdot (dA \vec{N}) \quad (\|\vec{N}\| = \|\vec{n}\| = 1)$$

Formule du transport convectif d'un vecteur aire matériel élémentaire





$$d\vec{x} = \underline{\underline{\nabla\vec{\phi}(\vec{X}, t)}} \cdot d\vec{X}$$

$$d\vec{x}' = \underline{\underline{\nabla\vec{\phi}(\vec{X}, t)}} \cdot d\vec{X}'$$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = d\vec{X} \cdot \left({}^t \underline{\underline{\nabla\vec{\phi}(\vec{X}, t)}} \cdot \underline{\underline{\nabla\vec{\phi}(\vec{X}, t)}} \right) \cdot d\vec{X}', \quad \forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

$$\underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) = {}^t \underline{\underline{\nabla\vec{\phi}(\vec{X}, t)}} \cdot \underline{\underline{\nabla\vec{\phi}(\vec{X}, t)}}$$

Tenseur des dilatations de Cauchy

Tenseur sym. et défini positif

C_{ij} sans dimension

Décomposition (unique) polaire de $\underline{\underline{\nabla}}\vec{\phi}$

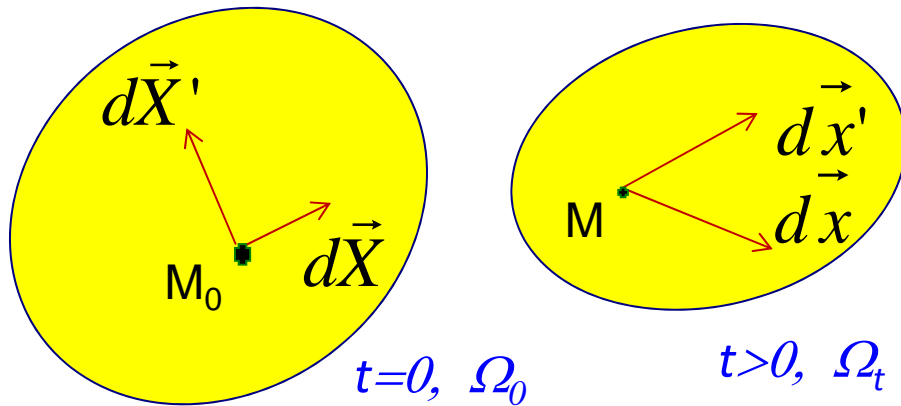
$$\underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) = {}^t \underline{\underline{\nabla}}\vec{\phi}(\vec{X}, t) \cdot \underline{\underline{\nabla}}\vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad \longrightarrow$$

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{\phi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{R}}(\vec{X}, t) \cdot \underline{\underline{U}}(\vec{X}, t)$$

$$\underline{\underline{U}}^2(\vec{X}, t) = \underline{\underline{C}}(\vec{X}, t), \quad {}^t \underline{\underline{R}}(\vec{X}, t) \cdot \underline{\underline{R}}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{\delta}}, \quad \det(\underline{\underline{R}}(\vec{X}, t)) = +1$$

$\underline{\underline{R}}(\vec{X}, t)$ **Tenseur de rotation**

$\underline{\underline{U}}(\vec{X}, t)$ **Tenseur (défini positif) de déformation pure**



$$\underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) = {}^t \underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t) \cdot \underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = d\vec{X} \cdot \underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}'$$

$$\forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

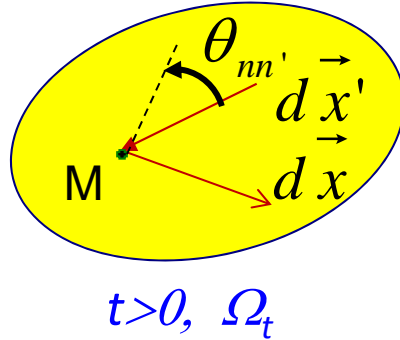
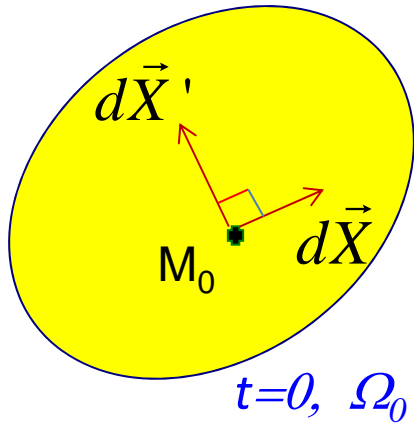
$$\text{Pour } \|\vec{n}\| = 1 \text{ et } d\vec{X} = d\vec{X}' = dX \vec{n}$$

$$\lambda(\vec{n}) = \frac{dx}{dX} = \sqrt{\vec{n} \cdot \underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}}$$

$\lambda(\vec{n})$: **Dilatation selon \underline{n}**

$$\lambda(\vec{e}_1) = \sqrt{C_{11}(\vec{X}, t)}, \quad \lambda(\vec{e}_2), \lambda(\vec{e}_3)$$

$$\Delta(\vec{n}) = \frac{dx - dX}{dX} = \lambda(\vec{n}) - 1 : \text{ **Allongement unitaire selon } \underline{n}**$$



$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = d\vec{X} \cdot \underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}'$$

$$\forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

Pour $d\vec{X} = dX \vec{n}$ et $d\vec{X}' = dX' \vec{n}'$,

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

$$\sin(\theta_{nn'}) = \frac{\vec{n} \cdot \underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}'}{\sqrt{\vec{n} \cdot \underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}} \sqrt{\vec{n}' \cdot \underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}'}}$$

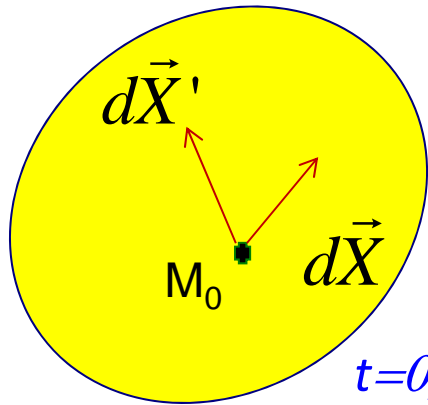
$\theta_{nn'}$: Angle de glissement dans le couple $(\underline{n}, \underline{n}')$

Angle de glissement dans le couple $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$:

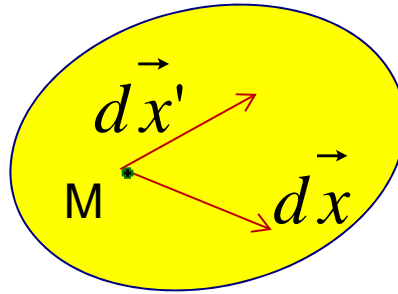
$$\sin(\theta_{12}) = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}}$$

Sym. de $\underline{\underline{C}} \Rightarrow \forall (\vec{X}, t) \exists$ une base orthogonale en \underline{X} dont les vecteurs (b.o.n principale) 2 à 2 ne subissent pas de glissement.

Conservation de tous les angles $\Leftrightarrow \underline{\underline{C}}$ est sphérique $\underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) = c(\vec{X}, t) \underline{\underline{\delta}}$



$t=0, \Omega_0$



$t>0, \Omega_t$

$$d\vec{x} = \underline{\underline{\nabla}} \phi(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}$$

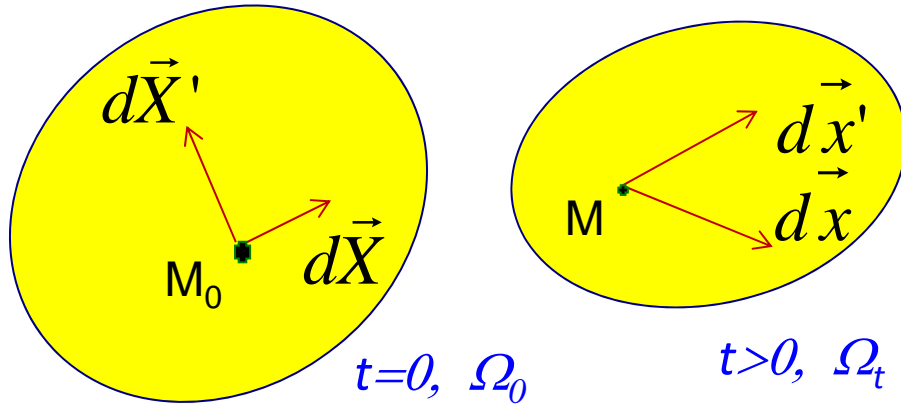
$$d\vec{x}' = \underline{\underline{\nabla}} \phi(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}'$$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}', \quad \forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

$$\underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C}}(\vec{X}, t) - \underline{\underline{\delta}} \right)$$

$\underline{\underline{E}}(\vec{X}, t)$: Tenseur (sym.) de déformation de Green-Lagrange
 E_{ij} sans dimension

$$dx^2 - dX^2 = 2 d\vec{X} \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}, \quad \forall d\vec{X} \quad \text{: Formule du } ds^2$$



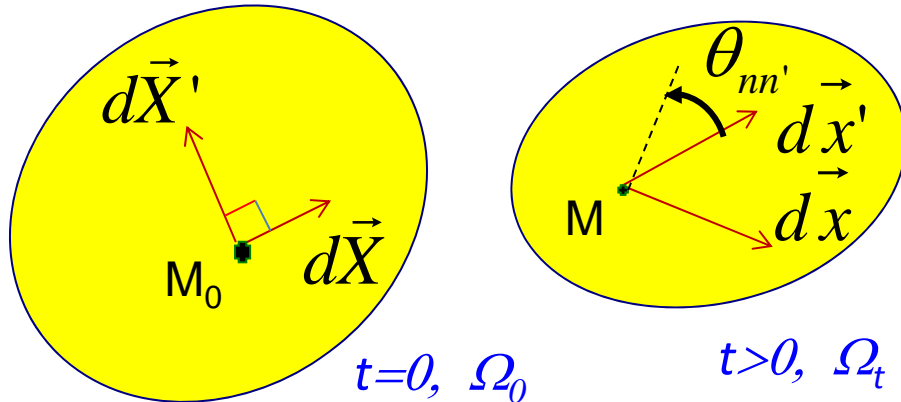
Tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}' \quad \forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

Allongement unitaire selon \underline{n}

$$\Delta(\vec{n}) = \frac{dx - dX}{dX} \left(= \frac{\Delta L}{L} \right) = \sqrt{1 + 2 \vec{n} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{n}} - 1$$

$$\Delta(\vec{e}_1) = \frac{dx - dX}{dX} = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1$$



Tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}' \quad \forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

Angle de glissement
dans $(\underline{n}, \underline{n}')$:

$$\sin(\theta_{nn'}) = \frac{2 \vec{n} \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}'}{\sqrt{1 + 2 \vec{n} \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}} \sqrt{1 + 2 \vec{n}' \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}'}}$$

$$\sin(\theta_{12}) = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1 + 2 E_{11}} \sqrt{1 + 2 E_{22}}}$$

$\forall (\vec{X}, t) \exists$ une base orthogonale en \underline{X} dont les vecteurs 2 à 2 ne subissent pas de glissement (b.o.n principale)

Conservation de tous les angles $\Leftrightarrow \underline{\underline{E}}$ est sphérique $\underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) = e(\vec{X}, t) \underline{\underline{\delta}}$ 19

Transformations particulières :

• **Transformation homogène** $\Leftrightarrow \underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{F}}(t) \quad \forall \vec{X}, t$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{F}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{b}(t)$

(Déformation homogène) $\Rightarrow \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{E}}(t) \quad \forall \vec{X}, t$

\Leftarrow

• Les formules de transport deviennent valables pour des **quantités non élémentaires** : vecteur matériel, volume matériel, surface plane orientée et p.s.

• Situation recherchée pour les essais mécaniques de laboratoire (essais homogènes)

Transformations particulières :

- Transformation de solide rigide (ou rigidifiante) \Leftrightarrow

$$\underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{R}}(t) \quad \forall \vec{X}, t \quad {}^t \underline{\underline{R}}(t) \cdot \underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{\delta}}, \det(\underline{\underline{R}}(t)) = +1$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{R}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{b}(t)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{array} \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{0}} \quad \forall \vec{X}, t$$

Champ de déplacement

$$\vec{\xi}(\vec{X}, t) = \vec{x} - \vec{X} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) - \vec{X}$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t) - \underline{\underline{\delta}}$$

$$\underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) \cdot \underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) \right)$$

(Relation non linéaire entre $\underline{\underline{\xi}}$ et $\underline{\underline{E}}$)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) \right)$$

Tenseur de déformation linéarisé

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\underline{\nabla}}}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) + {}^t \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla}}}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) \right)$$

Dans la b.o.n cartésienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j}(\vec{X}, t) + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i}(\vec{X}, t) \right)$$

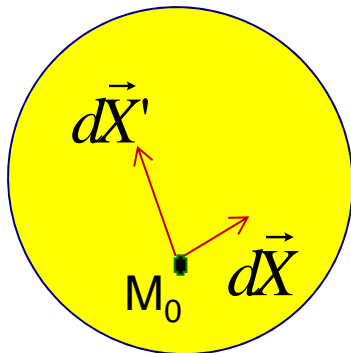
$$\left[\underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\vec{X}, t) \right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \xi_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial X_1} \right) \\ & \frac{\partial \xi_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial X_2} \right) \\ \text{Sym.} & & \frac{\partial \xi_3}{\partial X_3} \end{array} \right]$$

Transformation infinitésimale $\Leftrightarrow \left\| \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\underline{\xi}}}(\vec{X}, t) \right\| \ll 1 \quad \forall \vec{X}, t$

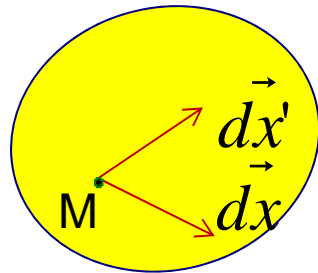
$\underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t)$ au 1^{er} ordre en $\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\underline{\xi}}}$

$$\left\| \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) \right\| \ll 1 \quad \forall \vec{X}, t \Leftrightarrow \forall i, j \quad \left| \varepsilon_{ij}(\vec{X}, t) \right| \ll 1 \quad \forall \vec{X}, t$$

Large domaine d'application en GC et GM



$t=0, \Omega_0$



$t > 0, \Omega_t$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}'$$

$$\forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

Allongement unitaire selon \underline{n} :

$$\Delta(\vec{n}) = \frac{dx - dX}{dX} \left(= \frac{\Delta L}{L} \right) = \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{n}}$$

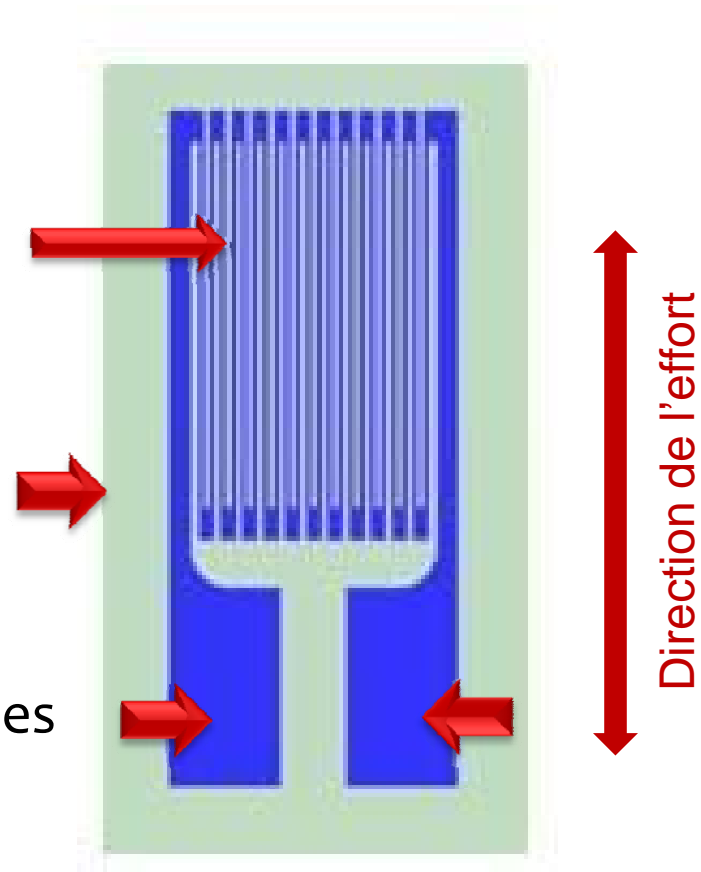
$$\varepsilon_{11} = \Delta(\vec{e}_1), \quad \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{33}$$

Mesure des déformations (allongements unitaires) : Les jauges de déformations

- Des brins métalliques parallèles

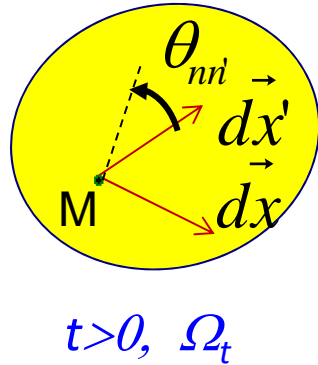
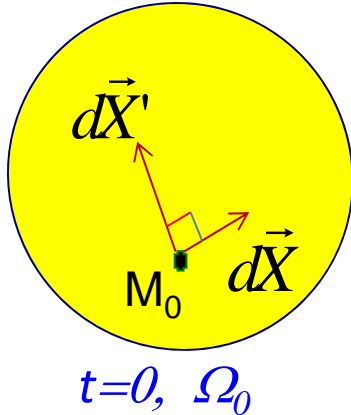
- Un support isolant

- Des sorties



$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{\rho}{S} \varepsilon_{longitudinal}$$

Transformation infinitésimale $\Leftrightarrow \left\| \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}}(\vec{X}, t) \right\| \ll 1 \quad \forall \vec{X}, t$



$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}'$$

$$\forall d\vec{X}, d\vec{X}'$$

Angle de glissement ds (n, n') :

$$\theta_{nn'} = 2 \vec{n} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{n}'$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\theta_{12}}{2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\theta_{13}}{2}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\theta_{23}}{2}$$

$\forall (\vec{X}, t) \exists$ une base orthogonale en \underline{X} dont les vecteurs 2 à 2 ne subissent pas de glissement (b.o.n principale)

Conservation de tous les angles $\Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}$ est sphérique $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) = \varepsilon(\vec{X}, t) \underline{\underline{\delta}}$
 en transf. Infinitésimale

Déformation volumique en transformation infinitésimale

$$d\Omega_t = \det(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t)) \cdot d\Omega_0$$

$$J(\vec{X}, t) = \det(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t)) = \det(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) + \underline{\underline{\delta}})$$

$$P_{\underline{\underline{A}}}(u) = \det(\underline{\underline{A}} - u \underline{\underline{\delta}})$$

$$= -u^3 + Tr(\underline{\underline{A}})u^2 + \frac{1}{2} \left((Tr(\underline{\underline{A}}))^2 - Tr(\underline{\underline{A}}^2) \right) u + \det(\underline{\underline{A}})$$

$$d\Omega_t = \left(1 + Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t)) \right) \cdot d\Omega_0 \quad \text{au } 1^{er} \text{ ordre en } \underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}$$

Déformation volumique:

$$Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t)) = \frac{d\Omega_t - d\Omega_0}{d\Omega_0} \left(= Tr(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t)) = \text{div} \vec{\xi} \right)$$

Transformation infinitésimale rigidifiante

Transformation rigidifiante $\vec{\phi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{R}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{b}(t)$, ${}^t \underline{\underline{R}}(t) \cdot \underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{\delta}}$

$$\Rightarrow \vec{\xi}(\vec{X}, t) = (\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}}) \cdot \vec{X} + \vec{b}(t)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{R}}(t) + {}^t \underline{\underline{R}}(t) - 2 \underline{\underline{\delta}})$$

Transformation infinitésimale: $\|\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}}\| \ll 1$

$$\Rightarrow {}^t (\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}}) (\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}}) = \underline{\underline{0}} \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

or ${}^t (\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}}) (\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}}) = -(\underline{\underline{R}}(t) + {}^t \underline{\underline{R}}(t) - 2 \underline{\underline{\delta}}) = -2 \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$

Ainsi $\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{0}}$ et $(\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}})$ est antisym.

et $(\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{\delta}}) \cdot \vec{X} = \vec{W} \wedge \vec{X}$, $\|\vec{W}\| \ll 1$

Transformation infinitésimale rigidifiante

$$\longleftrightarrow \boxed{\vec{\xi}(\vec{X}, t) = \vec{\xi}^0(t) + \vec{W}(t) \wedge \vec{X} \quad , \quad \|\vec{W}(t)\| \ll 1}$$

$$\longleftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{0}} \quad \forall \vec{X}$$

Le pb de comptabilité géométrique des déformations

•Définition :

Un champ de tenseurs symétriques $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est **géométriquement compatible** si et ssi :

$$\exists \text{ un champ } \vec{\xi} \text{ tel que } \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t) + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}(\vec{X}, t))$$

•**Théorème** : Un champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est **géométriquement compatible** si et ssi :

Dans une b.o.n cartésienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ on a :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial X_k \partial X_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial X_j \partial X_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial X_i \partial X_k}$$

$$(i, j, k, l) \in \{(1,1,2,2), (2,2,3,3), (3,3,1,1), (1,1,2,3), (2,2,3,1), (3,3,1,2)\}$$

Conséquences :

- Les champs $\underline{\underline{\varepsilon}}$ affines sont géométriquement compatibles.
- Les seuls $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sphériques et géom. compatibles sont les champs affines.
- Dans une transformation homogène et infinitésimale, on a :

$$\vec{\xi}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{\xi}^0(t) + \vec{W}(t) \wedge \vec{X}$$

FIN

Mécanique des Milieux Continus

Partie I – Concepts généraux: *Déformations et Efforts intérieurs*

**I-2 Description eulérienne du mvt des particules d'un MC
et tenseur taux de déformation**

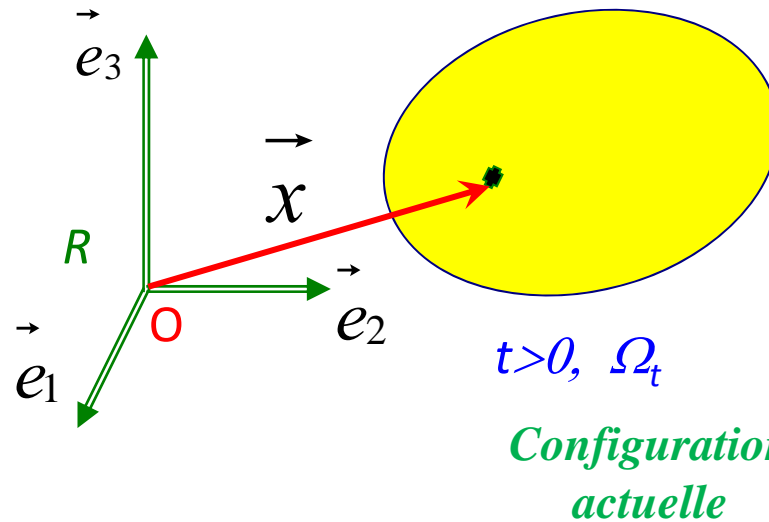
Hatem ZENZRI, 2012

Plan

- Cinématique des Milieux Continus
 - Description lagrangienne du mvt des particules d'un MC - Les déformations dans un MC
 - **Description eulérienne du mvt des particules d'un MC – Taux ou vitesse de déformation**
- Dynamique des Milieux Continus
 - Le principe fondamental de la dynamique (PFD)
 - Les efforts intérieurs dans un MC : Les contraintes de Cauchy
 - Equations locales de la Dynamique
 - Le principe des puissances virtuelles (PPV)
 - Etude pratique du tenseur des contraintes

Cinématique des Milieux Continus

Description eulérienne du mvt des particules d'un MC



Leonhard Euler (Suisse)
(1707-1783)

Description eulérienne du mvt : $\vec{v}(\vec{x}, t)$ Vitesse à l'instant t de la particule qui passe par la position géométrique \vec{x}

- Description géométrique: Les observateurs du mvt des particules sont placés en des points géométriques fixes
- Pas de configuration de référence donnée

Accélération à l'instant t de la particule qui passe par \underline{x} :

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad } \vec{v} \cdot \vec{v}}}$$

$$\dot{\vec{G}}(\vec{x}, t) = \frac{dG}{dt}(\vec{x}, t) = \frac{\partial G}{\partial t} + \text{grad } G \cdot \vec{v}$$

Dérivée particulaire de G

Remarque :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{0}$$

- **Trajectoire** d'une particule située en $\underline{\underline{X}}$ à $t=0$ et connaissant le champ \underline{v} :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \\ \vec{x}(t=0) = \vec{X} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

- **Lignes de courant** du mouvement à un instant τ fixé

= Lignes enveloppes du champ $\vec{v}(\vec{x}, \tau)$

= Lignes qui en chacun de leurs points \vec{x} ont une tangente portée par $\vec{v}(\vec{x}, \tau)$

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{v}(\vec{x}, \tau) \Rightarrow \frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, \tau)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, \tau)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, \tau)}$$

- **Mouvements stationnaires (ou permanents):** $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x})$

famille des trajectoires = famille des lignes de courant (indépendantes du temps)

Exemple : disque en rotation uniforme

Vitesse lagrangienne et vitesse eulérienne

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \Rightarrow \vec{v}^L(\vec{X}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad \begin{array}{l} \text{Vitesse à l'instant} \\ \text{t de la particule } \underline{X} \end{array}$$

$$\vec{v}^L(\vec{X}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \text{pour } \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

$$\vec{v}^L(\vec{X}, t) = \vec{v}(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t)$$

$$G^L(\vec{X}, t) = G(\vec{x}, t) \quad \text{pour } \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

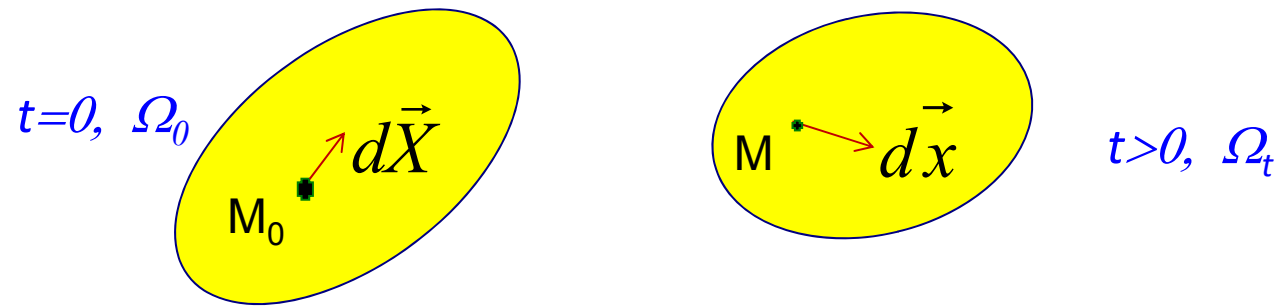
$$G^L(\vec{X}, t) = G(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t)$$

Gradient lagrangien et gradient eulérien

$$\nabla G^L(\vec{X}, t) = \text{grad } G(\vec{x}, t) \cdot \underline{\underline{\nabla \phi}}(\vec{X}, t)$$

$$\text{grad } G(\vec{x}, t) = \nabla G^L(\vec{X}, t) \cdot \left(\underline{\underline{\nabla \phi}} \right)^{-1}(\vec{X}, t)$$

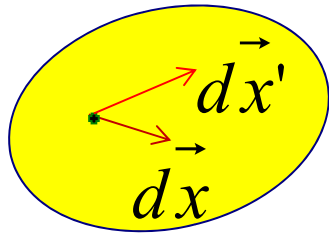
Les 2 grad. coïncident
en transf. infinitésimale



$$\text{grad } G(\vec{x}, t) = \nabla G^L(\vec{X}, t) \cdot \left(\underline{\underline{\nabla \phi}} \right)^{-1}(\vec{X}, t)$$

$$\vec{dx} = \underline{\underline{\nabla \phi}}(\vec{X}, t) \cdot \vec{dX} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{dx}} = \underline{\underline{\nabla v}}^L(\vec{X}, t) \cdot \vec{dX}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{dx}} = \underline{\underline{\underline{\text{grad } v}}(\vec{x}, t)} \cdot \vec{dx}$$



$t > 0, \Omega_t$

$$\dot{\vec{dx}} = \underline{\underline{\text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t)}} \cdot \vec{dx}, \quad \dot{\vec{dx}'} = \underline{\underline{\text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t)}} \cdot \vec{dx}'$$

\Rightarrow

$$\dot{\vec{dx} \cdot \vec{dx}'} = 2 \vec{dx}' \cdot \underline{\underline{d}}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx}$$

$$\underline{\underline{d}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t)}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t)}} \right)$$

**Tenseur taux (ou vitesse)
de déformation.**

Forme de $\underline{\underline{d}}$ similaire à celle de $\underline{\underline{\epsilon}}$ donc même pb de compatibilité géom.

$$d_{11} = \frac{\dot{dx}}{dx} \text{ pour } \vec{dx} = dx \vec{e}_1$$

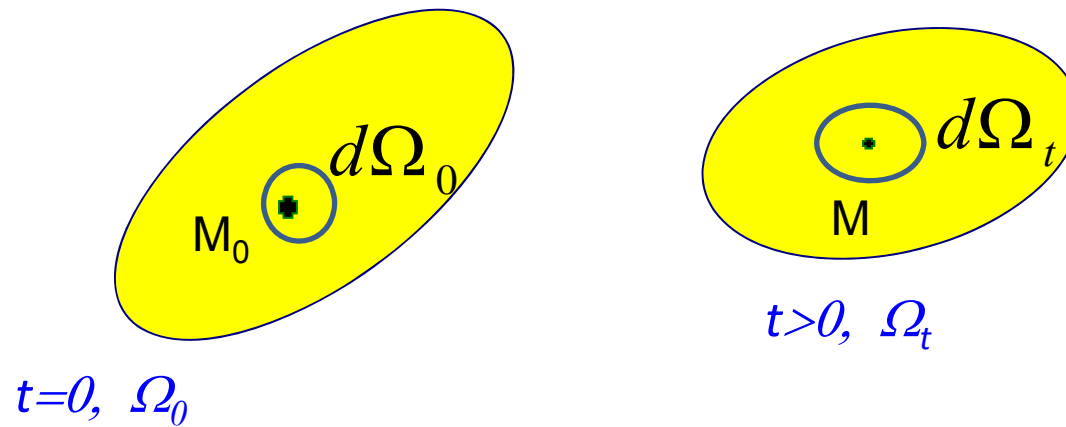
$$d_{12} = \frac{\dot{\theta}_{12}}{2} \text{ pour } \vec{dx} = dx \vec{e}_1 \text{ et } \vec{dx}' = dx' \vec{e}_2$$

$$\underline{\underline{d(\vec{x}, t)}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t)}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t)}} \right)$$

• **Mouvement de solide rigide**

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}^0(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{x}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{d(\vec{x}, t)}} = \underline{\underline{0}} \quad \forall \vec{x}, t$$



$$d\Omega_t = \det(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi}(\vec{X}, t)) \cdot d\Omega_0$$

$\Rightarrow \dots$

$$\dot{d\Omega}_t = \text{div} \vec{v} \, d\Omega_t = \text{Tr}(\underline{\underline{d}}) \, d\Omega_t$$

Pour un milieu incompressible $\text{div} \vec{v} = \text{Tr}(\underline{\underline{d}}) = 0$

$V(t) \subset \Omega_t$ volume de contrôle non nécessairement matériel

La surface géométrique $\partial V(t)$ se propage à la vitesse \underline{W}

Théorème (Reynolds) : Pour $b \in \mathcal{C}^1$ et $L = \int_{V(t)} b(\vec{x}, t) d\Omega_t$

$$\dot{L} = \int_{V(t)} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial V(t)} b (\vec{W} \cdot \vec{n}) dS_t$$

Pour un domaine matériel \mathcal{D}_t , la surface $\partial \mathcal{D}_t$ est matérielle et $\underline{W} = \underline{v}$

$$L = \int_{\mathcal{D}_t} b(\vec{x}, t) d\Omega_t \quad \dot{L} = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS_t$$

$b \in \mathcal{C}^1$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} \left(\dot{b} + b \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega_t$$

$$L = \int_{\mathcal{D}_t} b(\vec{x}, t) d\Omega_t$$

Cas où b est discontinue à la traversée d'une surface géom. Σ qui se propage dans \mathcal{D}_t à la vitesse \underline{W}

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t} b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS_t - \int_{\Sigma} [[b]] \vec{W} \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div} b \vec{v} \right) d\Omega_t + \int_{\Sigma} \left[[b(\vec{v} - \vec{W})] \right] \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \left(\dot{b} + b \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega_t + \int_{\Sigma} \left[[b(\vec{v} - \vec{W})] \right] \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

$$L = \int_{\mathcal{D}_t} b \, d\Omega_t, \quad \dot{L} = \int_{\mathcal{D}_t} \left(\dot{b} + b \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega_t + \int_{\Sigma} \left[\left[b(\vec{v} - \vec{W}) \right] \right] \cdot \vec{n} \, dS$$

Principe de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\vec{x}, t) \, d\Omega_t = 0 \quad \forall \mathcal{D}_t \text{ dom. mat.} \Rightarrow$$

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{x}, t$$

Equation de continuité
ou Eq.de conservation de la masse

$$\iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{x}, t$$

Cas où ρ est discontinue à la traversée d'une surface géom. Σ qui se propage dans \mathcal{D}_t à la vitesse \underline{W}

$$\left[\left[\rho(\vec{v} - \vec{W}) \right] \right] \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

Cette condition est tjrs vérifiée si la surface Σ est une surface matérielle ($\underline{v} = \underline{W}$)

Conséquence :

$$J = \int_{\Omega_t} \rho a d\Omega_t \Rightarrow$$

$$\dot{J} = \int_{\Omega_t} \rho \dot{a} d\Omega_t + \int_{\Sigma} \left[\rho a (\vec{v} - \vec{W}) \right] \cdot \vec{n} dS$$

Relation entre les taux de déf. D'Euler et de Lagrange

Lagrange : $d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = 2 d\vec{X} \cdot \underline{\underline{E}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}' \Rightarrow$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{dx \cdot dx'}}^{\bullet} = 2 \overrightarrow{dX} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}}(\vec{X}, t) \cdot \overrightarrow{dX}'$$

Euler : $\overrightarrow{\overrightarrow{dx \cdot dx'}}^{\bullet} = 2 \overrightarrow{dx} \cdot \underline{\underline{d}}(\vec{x}, t) \cdot \overrightarrow{dx}'$

$$\underline{\underline{d}}(\vec{x}, t) = \left({}^t \underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi} \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}}(\vec{X}, t) \cdot \left(\underline{\underline{\nabla}} \vec{\phi} \right)^{-1}$$

En transformation infinitésimale

$$\underline{\underline{d}}(\vec{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{X}, t) \text{ au } 1^{er} \text{ ordre en } \underline{\underline{\nabla}} \vec{\xi}$$

FIN

Mécanique des Milieux Continus

Annexe– Aperçu sur le calcul tensoriel

Hatem ZENZRI, 2012

Notations et Convention

- \mathbb{R}^n euclidien muni d'une b.o.n $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$
- **Convention de sommation sur les indices répétés (Einstein)**

$$\alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \alpha_k \beta_k = \alpha_j \beta_j$$

$$\alpha_i \beta_j A_{kj} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j A_{kj} \vec{e}_i \quad \begin{array}{l} i \text{ et } j \text{ sont des indices saturés ou muets,} \\ k \text{ est un indice fixé} \end{array}$$

Dans toute expression, un indice apparaît une fois (indice fixé) ou 2 fois (indice saturé ou muet).

Tenseurs d'ordre 1 sur \mathbb{R}^n euclidien

- Espace des tenseurs d'ordre 1 sur \mathbb{R}^n : $\otimes_1 \mathbb{R}^n$

$$T \in \otimes_1 \mathbb{R}^n, \quad T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{forme linéaire}$$
$$\vec{u} \rightarrow T(\vec{u})$$

$$T(\vec{u}) = T(u_i \vec{e}_i) = T(\vec{e}_i) u_i$$

$$T_i = T(\vec{e}_i): \quad \text{Composantes de T dans la base B}$$

$$T(\vec{u}) = T_i u_i \qquad \vec{T} = T_i \vec{e}_i$$

$$T \in \otimes_1 \mathbb{R}^n \quad \leftrightarrow \quad \vec{T}$$

Tenseurs d'ordre 2 sur \mathbb{R}^n euclidien

- Espace des tenseurs d'ordre 2 sur \mathbb{R}^n : $\otimes_2 \mathbb{R}^n$

$T \in \otimes_2 \mathbb{R}^n$, $T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire

$$\left(\vec{u}, \vec{v} \right) \rightarrow T(\vec{u}, \vec{v})$$

$$T(\vec{u}, \vec{v}) = T(\vec{e}_i, \vec{e}_j) u_i v_j$$

$T_{ij} = T(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$: Composantes de T dans la base B

$$T(\vec{u}, \vec{v}) = T_{ij} u_i v_j \quad \text{Matrice } [T] / [T]_{ij} = T_{ij}$$

$$T \in \otimes_2 \leftrightarrow [T]$$

- Exemple : tenseur métrique ou de Kronecker

$$\delta: \left(\vec{u}, \vec{v} \right) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{Matrice } [\delta] = I_d \text{ dans toute b.o.n}$$

Tenseurs d'ordre p sur \mathbb{R}^n euclidien

- Espace des tenseurs d'ordre p sur \mathbb{R}^n : $\bigotimes_p \mathbb{R}^n$

$T \in \bigotimes_p \mathbb{R}^n$, $T : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$ forme multi-linéaire

$$\left(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^p \right) \rightarrow T \left(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^p \right)$$

$$T \left(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^p \right) = T \left(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_p} \right) u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p}$$

$$T_{i_1 i_2 \dots i_p} = T \left(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_p} \right) \quad \text{Composantes de T dans la base B}$$

$$T \left(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^p \right) = T_{i_1 i_2 \dots i_p} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p}$$

Produit tensoriel

$$T \in \bigotimes_p \mathbb{R}^n, \quad T' \in \bigotimes_q \mathbb{R}^n$$

$$T \otimes T' \in \bigotimes_{p+q} \mathbb{R}^n$$

$$T \otimes T' \left(\begin{matrix} \vec{u}^{\rightarrow 1} & \vec{u}^{\rightarrow 2} & \dots & \vec{u}^{\rightarrow p+q} \end{matrix} \right) = T \left(\begin{matrix} \vec{u}^{\rightarrow 1} & \vec{u}^{\rightarrow 2} & \dots & \vec{u}^{\rightarrow p} \end{matrix} \right) T' \left(\begin{matrix} \vec{u}^{\rightarrow p+1} & \vec{u}^{\rightarrow p+2} & \dots & \vec{u}^{\rightarrow p+q} \end{matrix} \right)$$

Exemples:

$$\left(\vec{u} \otimes \vec{v} \right)_{ij} = u_i v_j, \quad n = 3 \quad \left[\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{A}} \otimes \left(\vec{u} \otimes \vec{v} \right) \right)_{ijkl} = A_{ij} u_k v_l$$

Produit simplement contracté de 2 tenseurs

$$T \in \underset{p}{\otimes} \mathbb{R}^n, \quad T' \in \underset{q}{\otimes} \mathbb{R}^n$$

$$T.T' \in \underset{p+q-2}{\otimes} \mathbb{R}^n \quad (p+q \geq 2)$$

$$T.T' \left(\overset{\rightarrow 1}{u}, \overset{\rightarrow 2}{u}, \dots, \overset{\rightarrow p+q-2}{u} \right) = T \left(\overset{\rightarrow 1}{u}, \overset{\rightarrow 2}{u}, \dots, \overset{\rightarrow p-1}{u}, e_i \right) T' \left(e_i, \overset{\rightarrow p}{u}, \overset{\rightarrow p+1}{u}, \dots, \overset{\rightarrow p+q-2}{u} \right)$$

$$(T.T')_{i_1 i_2 \dots i_{p+q-2}} = T_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} k} T'_{k i_p i_{p+1} \dots i_{p+q-2}}$$

Exemples:

$$\vec{u} . \vec{v} = u_i v_i \quad \left(\underline{\underline{A}} . \vec{u} \right)_i = A_{ij} u_j$$

$$\left(\vec{u} . \underline{\underline{A}} \right)_i = u_j A_{ji} = \left({}^t \underline{\underline{A}} \right)_{ij} u_j = \left({}^t \underline{\underline{A}} . \vec{u} \right)_i \quad \text{et donc } \vec{u} . \underline{\underline{A}} = {}^t \underline{\underline{A}} . \vec{u}$$

$$\left(\underline{\underline{A}} . \vec{a} \right) \left(\underline{\underline{B}} . \vec{b} \right) = \left(A_{ij} a_j \right) \left(B_{ik} b_k \right) = a_j \left({}^t \underline{\underline{A}} \right)_{ji} B_{ik} b_k = \vec{a} . \left({}^t \underline{\underline{A}} . \underline{\underline{B}} \right) . \vec{b}$$

$$\left(\underline{\underline{A}} . \underline{\underline{B}} \right)_{ij} = A_{ik} A_{kj} \quad \left(\underline{\underline{R}} . \underline{\underline{B}} \right)_{ijkl} = R_{ijkm} B_{ml}$$

Produit doublement contracté de 2 tenseurs

$$T \in \underset{p}{\otimes} \mathbb{R}^n, \quad T' \in \underset{q}{\otimes} \mathbb{R}^n$$

$$T : T' \in \underset{p+q-4}{\otimes} \mathbb{R}^n \quad (p+q \geq 4)$$

$$T : T' \left(\overset{\rightarrow 1}{u}, \overset{\rightarrow 2}{u}, \dots, \overset{\rightarrow p+q-4}{u} \right) = T \left(\overset{\rightarrow 1}{u}, \overset{\rightarrow 2}{u}, \dots, \overset{\rightarrow p-2}{u}, \overset{\rightarrow}{e_i}, \overset{\rightarrow}{e_j} \right) T' \left(\overset{\rightarrow}{e_j}, \overset{\rightarrow}{e_i}, \overset{\rightarrow p-1}{u}, \overset{\rightarrow p}{u}, \dots, \overset{\rightarrow p+q-4}{u} \right)$$

$$\left(T : T' \right)_{i_1 i_2 \dots i_{p+q-4}} = T_{i_1 i_2 \dots i_{p-2} k m} T'_{m k i_{p-1} i_p \dots i_{p+q-4}}$$

Exemples:

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ik} B_{ki} = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{A}} = \text{Tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \quad \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\delta}} = \text{Tr}(\underline{\underline{A}})$$

$$\left(\underline{\underline{R}} : \underline{\underline{B}} \right)_{ij} = R_{ijkm} B_{mk}$$

Analyse tensorielle

Ω ouvert de \mathbb{R}^n .

T un champ sur Ω de tenseurs d'ordre p :

$$T : \Omega \rightarrow \otimes_p \mathbb{R}^n$$

$$\vec{X} \rightarrow T(\vec{X})$$

Gradient d'un champ de tenseurs

$$\text{grad } T(\vec{X}) \left(\text{ou } \nabla T(\vec{X}) \right) \in \otimes_{p+1} \mathbb{R}^n$$

Dans une b.o.n cartésienne

$$\vec{T}(\vec{X}) = T_i(\vec{X}) \vec{e}_i, \quad \underline{\underline{\nabla}} \vec{T}(\vec{X}) = \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad \left(\underline{\underline{\nabla}} \vec{T}(\vec{X}) \right)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial X_j}$$

$$\underline{\underline{T}}(\vec{X}) = T_{ij}(\vec{X}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{T}}(\vec{X}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k, \quad \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{T}}(\vec{X}) \right)_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k}$$

Divergence d'un champ de tenseurs

$$\operatorname{div} T(\vec{X}) \in \underset{p-1}{\otimes} \mathbb{R}^n \quad p \geq 1$$

Dans une b.o.n cartésienne

$$\vec{T}(\vec{X}) = T_i(\vec{X}) \vec{e}_i, \quad \operatorname{div} \vec{T}(\vec{X}) = \frac{\partial T_i}{\partial X_i} = \operatorname{Tr}(\underline{\underline{\nabla}} \vec{T}(\vec{X}))$$

$$\underline{\underline{T}}(\vec{X}) = T_{ij}(\vec{X}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad \operatorname{div} \underline{\underline{T}}(\vec{X}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \vec{e}_i, \quad \left(\operatorname{div} \underline{\underline{T}}(\vec{X}) \right)_k = \frac{\partial T_{kj}}{\partial X_j}$$

Formule de Green (intégration par parties)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot g \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (f \cdot g) n_i \, dS - \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial X_i} \, d\Omega$$

n_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur unitaire \vec{n} normal extérieur à $\partial\Omega$

Formule de la divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} T \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} T \cdot \vec{n} \, dS$$

FIN

Mécanique des Milieux Continus

Partie I – Concepts généraux : *Déformations et Efforts intérieurs*

I-3 Dynamique des Milieux Continus et Efforts Intérieurs

Hatem ZENZRI, 2012

Plan

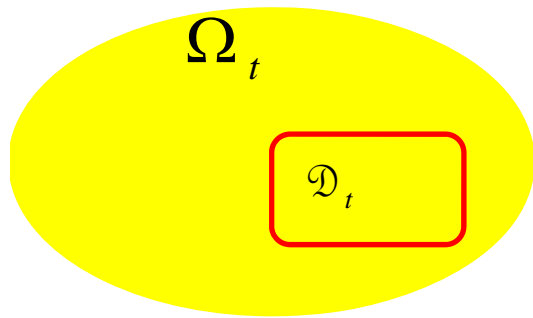
- Cinématique des Milieux Continus

- Description lagrangienne du mvt des particules d'un MC - Les déformations dans un MC
- Description eulérienne du mvt des particules d'un MC – Taux ou vitesse de déformation

- Dynamique des Milieux Continus

- **Le principe fondamental de la dynamique (PFD)**
- **Les efforts intérieurs dans un MC : Les contraintes de Cauchy**
- **Equations locales de la Dynamique**
- **Le principe des puissances virtuelles (PPV)**
- **Etude pratique du tenseur des contraintes**

Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)



M.C dans sa configuration
actuelle à $t > 0$

Champ de vitesse eulérien : $\vec{v}(\vec{x}, t)$

PFD : $\forall t$ et $\forall \mathcal{D}_t$,

Torseur des forces ext. agissant sur \mathcal{D}_t

=

Torseur Dynamique dans \mathcal{D}_t

Torseur Dynamique dans \mathcal{D}_t

=

Torseur dérivée particulière du torseur cinétique (ou tors. des quant. de mvt) ds \mathcal{D}_t

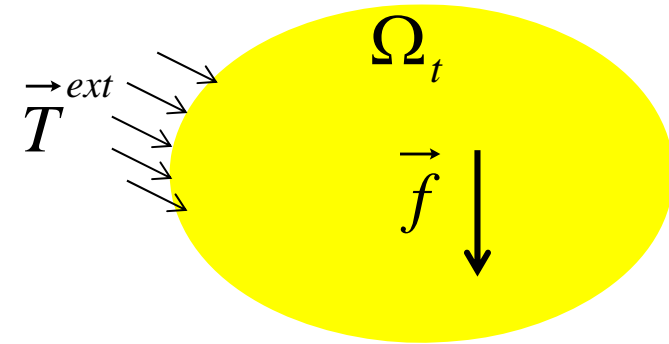
$$\text{Résultante dynamique dans } \mathcal{D}_t = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{v} d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{\gamma} d\Omega_t$$

$$\text{Moment dynamique/O dans } \mathcal{D}_t = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \vec{x} \wedge \rho \vec{v} d\Omega_t = \int_{\mathcal{D}_t} \vec{x} \wedge \rho \vec{\gamma} d\Omega_t$$

PFD= Principe de conservation du torseur des quantités de mvt.

Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Forces ext. agissant sur Ω_t



- Forces ext. à distance réparties dans le volume Ω_t :

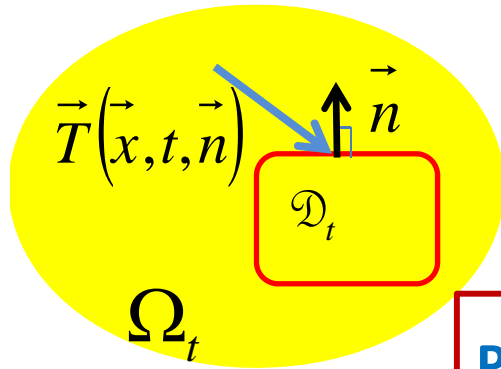
$$\vec{f}(\vec{x}, t) \quad (N / m^3) \quad \text{Densité volumique de force} - \text{Exemple : } \vec{f} = \rho \vec{g}$$

- Forces ext. de contact réparties sur $\partial \Omega_t$:

$$\vec{T}^{ext}(\vec{x}, t) \quad (N / m^2 = Pa) \quad \text{Densité surfacique de force} - \text{Exemple : } \vec{T}^{ext} = -p \vec{n}$$

$$\text{PFD appliqué à } \Omega_t : \begin{cases} \int_{\Omega_t} \vec{f} \, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \vec{T}^{ext} \, dS_t = \int_{\Omega_t} \rho \vec{\gamma} \, d\Omega_t & - \\ \int_{\Omega_t} \vec{x} \wedge \vec{f} \, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \vec{x} \wedge \vec{T}^{ext} \, dS_t = \int_{\Omega_t} \vec{x} \wedge \rho \vec{\gamma} \, d\Omega_t & \end{cases}$$

Les efforts intérieurs dans un M.C



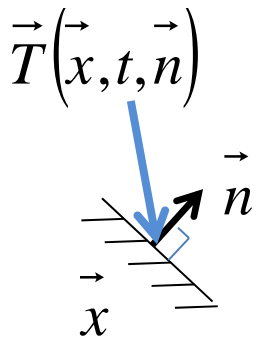
Augustin Louis Cauchy
(France)
(1789-1857)

Toute surface de coupure $\partial\mathcal{D}_t$ dans Ω_t définit des efforts int. à Ω_t qui correspondent aux actions entre $(\Omega_t \setminus \mathcal{D}_t)$ et \mathcal{D}_t

Postulat de Cauchy :

Les actions de $(\Omega_t \setminus \mathcal{D}_t)$ sur \mathcal{D}_t (efforts int. à Ω_t) sont des forces de contact réparties sur $\partial\mathcal{D}_t$ et représentées par une densité surfacique de force \vec{T} /

$$\vec{T} = \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) \quad (N/m^2 = Pa) \quad \text{Vecteur-contrainte}$$



$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$: Vecteur-contrainte en (\underline{x}, t) appliqué à la facette de normale \underline{n}

Le postulat de Cauchy

- (1) exclut les interactions à distance entre particules (Cas des milieux polarisés) .
- (2) limite l'influence de la surface de coupure à sa normale (pas d'influence de la courbure).

Théorème

$$(1) \quad \forall \vec{x}, t, \vec{n} \quad / \quad \vec{T}(\vec{x}, t, -\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$$

Th. de l'action et de la réaction

$$(2) \quad \vec{T} \text{ est linéaire} / \vec{n}$$

$$\text{Ainsi, } \exists \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t) \quad / \quad \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}$$

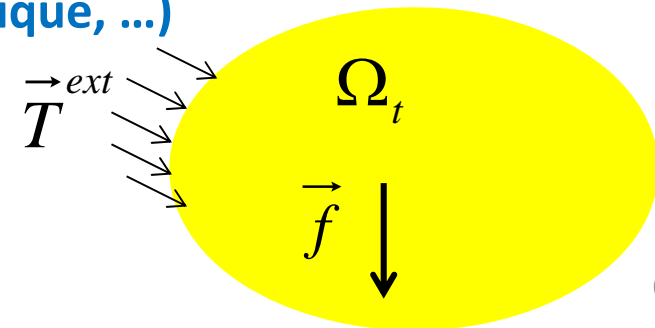
$\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t)$: Tenseur des contraintes de Cauchy en (\vec{x}, t)

$$(3) \quad \forall \vec{x}, t \quad \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t) \text{ est symétrique}$$

$$(4) \quad \forall \vec{x}, t \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

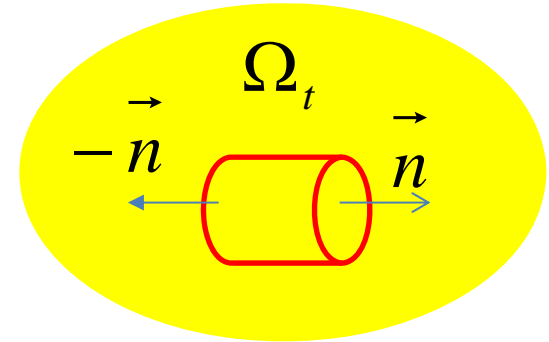
Eq. d'équilibre (du mvt, de la dynamique, ...)

$$CL: \text{ Sur } \partial\Omega_t \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}^{ext}$$



Preuve de $(1) \quad \forall \vec{x}, t, \vec{n} \quad / \quad \vec{T}(\vec{x}, t, -\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$

\underline{x}, t et \underline{n} fixés. \mathcal{D}_t cylindre d'axe \underline{n} , de hauteur H , de bases S^+ et S^- circulaires de rayon R , et de surface latérale S^L . S^+ est centrée en \underline{x} .



PFD en résultante appliqué à \mathcal{D}_t :

$$\int_{\mathcal{D}_t} (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) d\Omega_t + \int_{S^L} \vec{T}(\vec{z}, t, \vec{e}_r) dS_t + \int_{S^+} \vec{T}(\vec{y}_+, t, \vec{n}) dS_t + \int_{S^-} \vec{T}(\vec{y}_-, t, -\vec{n}) dS_t = \vec{0}$$

$$S = \pi R^2; V_\Omega = HS; S^L = 2\pi RH; \quad \frac{1}{S} = \frac{H}{V_\Omega} = \frac{2H}{RS^L}$$

$$\frac{H}{V_\Omega} \int_{\mathcal{D}_t} (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) d\Omega_t + \frac{2H}{RS^L} \int_{S^L} \vec{T}(\vec{z}, t, \vec{e}_r) dS_t + \frac{1}{S} \int_{S^+} \vec{T}(\vec{y}_+, t, \vec{n}) dS_t + \frac{1}{S} \int_{S^-} \vec{T}(\vec{y}_-, t, -\vec{n}) dS_t = \vec{0}$$

$$H \rightarrow 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{S} \int_S \vec{T}(\vec{y}, t, \vec{n}) + \vec{T}(\vec{y}, t, -\vec{n}) dS_t = \vec{0} \quad \forall R$$

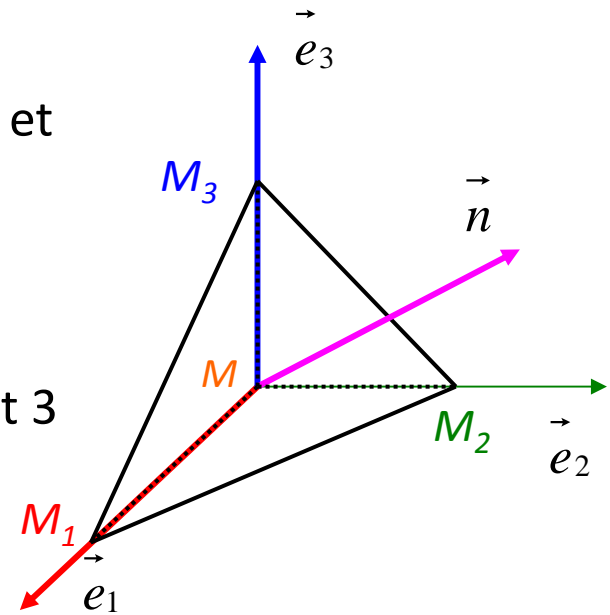
$$R \rightarrow 0 \Rightarrow \quad \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) + \vec{T}(\vec{x}, t, -\vec{n}) = \vec{0}$$

Preuve de (2) \vec{T} est linéaire / \vec{n}

\underline{x}, t et \underline{n} fixés. \mathcal{D}_t tétraèdre de sommet \underline{x} , de hauteur H et d'axes portés par $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ et \underline{e}_3 .

Les faces du tétraèdre sont :

- F_i face de normale extérieure $-\underline{e}_i$ et d'aire S_i , $i=1,2$ et 3
- F face oblique de normale $\underline{n} = n_i \underline{e}_i$ et d'aire S .



PFD en résultante appliqué à \mathcal{D}_t :

$$\int_{\mathcal{D}_t} (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) d\Omega_t + \int_F \vec{T}(\vec{z}, t, \vec{n}) dS_t + \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \vec{T}(\vec{y}_i, t, -\vec{e}_i) dS_t = \vec{0}$$

$$V_\Omega = \frac{HS}{3}; \quad S_i = n_i S; \quad \frac{1}{S} = \frac{H}{3V_\Omega} = \frac{n_i}{S_i}$$

$$\frac{H}{3V_\Omega} \int_{\mathcal{D}_t} (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) d\Omega_t + \frac{1}{S} \int_F \vec{T}(\vec{z}, t, \vec{n}) dS_t + \sum_{i=1}^3 \frac{n_i}{S_i} \int_{F_i} \vec{T}(\vec{y}_i, t, -\vec{e}_i) dS_t = \vec{0}$$

$$H \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 n_i \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{e}_i) \text{ et } \vec{T} \text{ est lin. / } \vec{n}$$

Théorème 1 (*Lemme du tétraèdre*)

Si $\int_{\Omega} A \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} b \, dS \quad \forall \Omega$ alors b est linéaire / \vec{n}

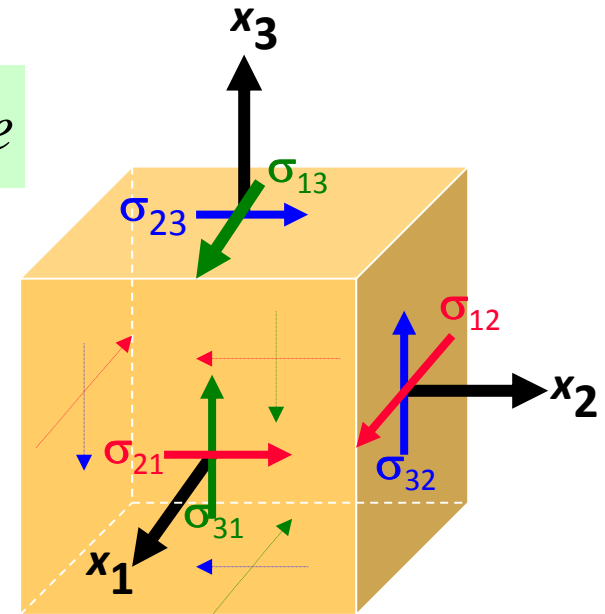
Preuve de $(3) \forall \underline{x}, t \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \text{ est symétrique}$

\underline{x} et t fixés.

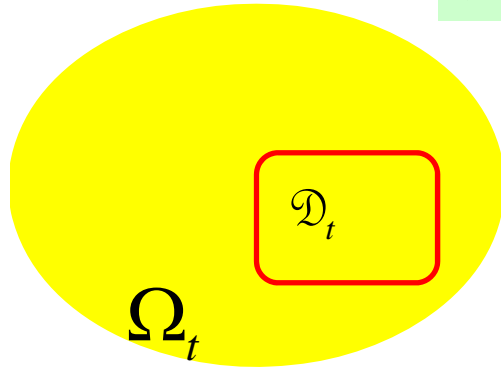
\mathcal{D}_t cube de centre \underline{x} , de côté dx et d'axes portés par \underline{e}_1 , \underline{e}_2 et \underline{e}_3 .

PFD en moment appliqué à \mathcal{D}_t :

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \end{cases}$$



Preuve de $(4) \forall \vec{x}, t \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$



PFD en résultante appliqué à \mathcal{D}_t :

$$\int_{\mathcal{D}_t} (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) d\Omega_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} dS_t = \vec{0}$$

Th de la divergence \Rightarrow

$$\int_{\mathcal{D}_t} (\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma}) d\Omega_t = \vec{0} \quad \forall \mathcal{D}_t$$

$$\Rightarrow \forall \vec{x}, t \quad \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

Dans la b.o.n cartésienne

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) : \left(\text{div} \underline{\underline{\sigma}} \right)_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \gamma_1 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho \gamma_2 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \gamma_3 \end{cases}$$

Complément : Discontinuité du vecteur-contrainte

Cas où \underline{v} est discontinue à la traversée d'une surface géom. Σ qui se propage dans \mathcal{D}_t à la vitesse \underline{W}

PFD en résultante appliqué à \mathcal{D}_t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{v} \, d\Omega_t &= \int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{\gamma} \, d\Omega_t + \int_{\Sigma} \left[\left[\rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{W}) \cdot \vec{n} \right] \right] dS \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \vec{f} \, d\Omega_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \vec{n} \, dS_t \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \vec{n} = \left[\left[\rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{W}) \cdot \vec{n} \right] \right] \quad \text{sur } \Sigma$$

En statique ou pour toute surface Σ matérielle (interface ou surface de contact parfait entre 2 matériaux :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Sigma$$

Le Principe des Puissances Virtuelles (PPV)

PPV \Leftrightarrow PFD

P.P.V $\forall t, \mathcal{D}_t; \forall \vec{v}^*$ *champ de vitesse virtuelle*

$\forall \underline{\underline{\sigma}}$ sym. vérifiant $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma},$

$$P_{\text{ext}}(\vec{v}^*) + P_{\text{int}}(\vec{v}^*) = \mathcal{Q}(\vec{v}^*)$$

$\forall \vec{v}^{*r}$ *champ de vitesse de solide rigide* $P_{\text{int}}(\vec{v}^{*r}) = 0$

P.P.V $P_{ext}(\vec{v}^*) + P_{int}(\vec{v}^*) = \mathcal{Q}(\vec{v}^*)$

$$P_{ext}(\vec{v}^*) = \int_{\mathcal{D}_t} \vec{f} \cdot \vec{v}^* d\Omega_t + \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \vec{n} \cdot \vec{v}^* dS_t$$

$$\mathcal{Q}(\vec{v}^*) = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v}^* d\Omega_t$$

$$P_{int}(\vec{v}^*) = - \int_{\mathcal{D}_t} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{d}}}(\vec{v}^*) d\Omega_t \quad (\vec{v}^* \in \mathcal{C}^1)$$

$$\underline{\underline{\underline{d}}}(\vec{v}^*) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{grad}}} \vec{v}^* + {}^t \underline{\underline{\underline{grad}}} \vec{v}^* \right)$$

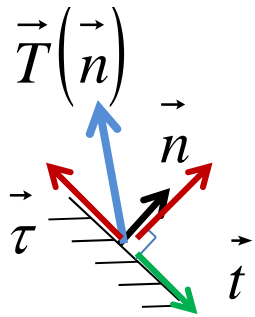
$$P_{int}(\vec{v}^*) = - \int_{\mathcal{D}_t} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{d}}}(\vec{v}^*) d\Omega_t - \int_{\Sigma} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \vec{n} \cdot \left[\vec{v}^* \right] dS \quad (\vec{v}^* \in \mathcal{C}^1 / \text{morceaux})$$

Etude pratique du tenseur des contraintes

Les cercles de Mohr

Pour \underline{x} et t fixés et donc $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ fixé, étude du vecteur-contrainte

$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$ quand \underline{n} varie.



$$\vec{T}(\vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$

Soit $\vec{t} / \|\vec{t}\| = 1$, $\vec{t} \in \text{plan}(\vec{n}, \vec{T}(\vec{n}))$ et $(\vec{t}, \vec{n}) = +\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\vec{T}(\vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}}$$

σ : contrainte normale

τ : contrainte tangentielle (de cisaillement ou cission)

Convention de signe MMC : $\begin{cases} \sigma > 0 \text{ en traction} \\ \sigma < 0 \text{ en compression} \end{cases}$

Plan de Mohr (σ, τ) : $\vec{T}(\vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \rightarrow M(\sigma, \tau)$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ b.o.n principale de $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t)$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ contraintes principales : $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}_1 = \sigma_1 \vec{v}_1 \dots$

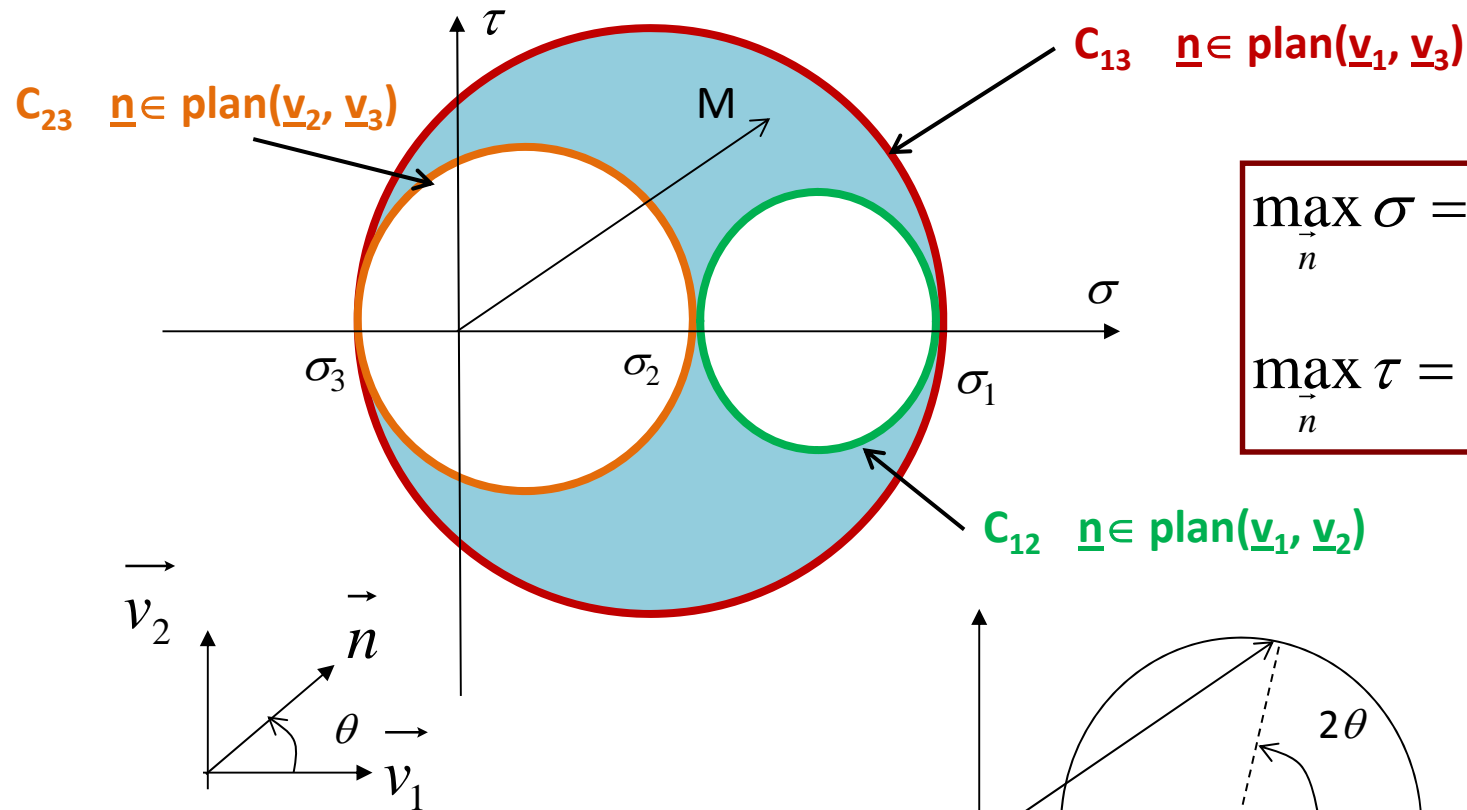
$$\vec{n} = n_i \vec{v}_i, \quad \vec{T}(\vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} = \sigma_1 n_1 \vec{v}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{v}_2 + \sigma_3 n_3 \vec{v}_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} n_1^2 = \frac{\left(\sigma - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \\ n_2^2 = \frac{\left(\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \geq 0 \\ n_3^2 = \frac{\left(\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0 \end{array} \right.$$

Cas où les σ_i sont 2 à 2 \neq

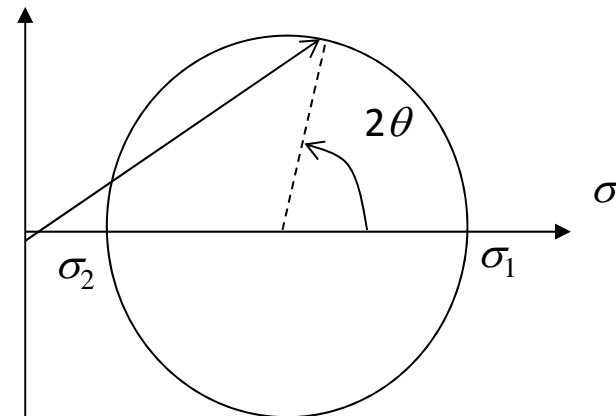
$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Les cercles de Mohr



$$\max_{\vec{n}} \sigma = \max_{1 \leq i \leq 3} \sigma_i$$

$$\max_{\vec{n}} \tau = \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \neq j \leq 3} (\sigma_i - \sigma_j)$$

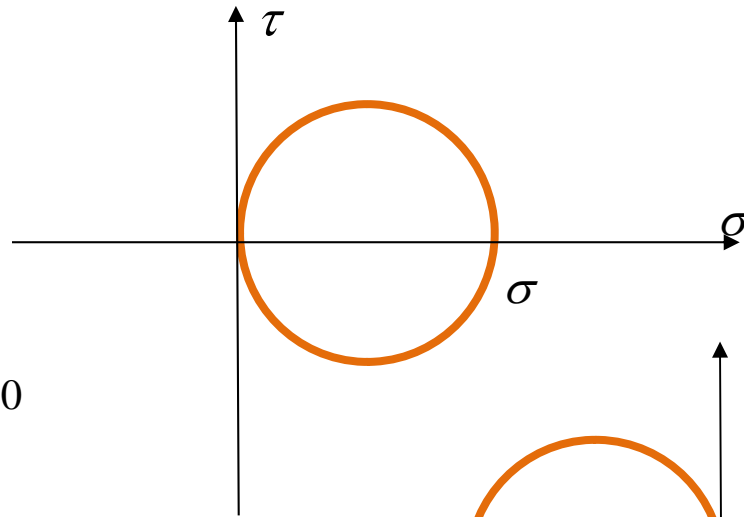


Un seul cercle lorsque 2 cont. princ. sont égales $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$
 Un point pour un tenseur sphérique

Exemples

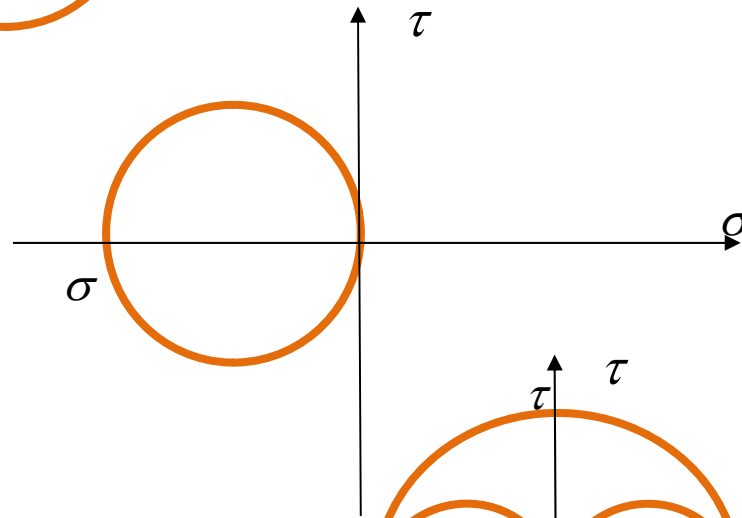
Traction simple

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma > 0$$



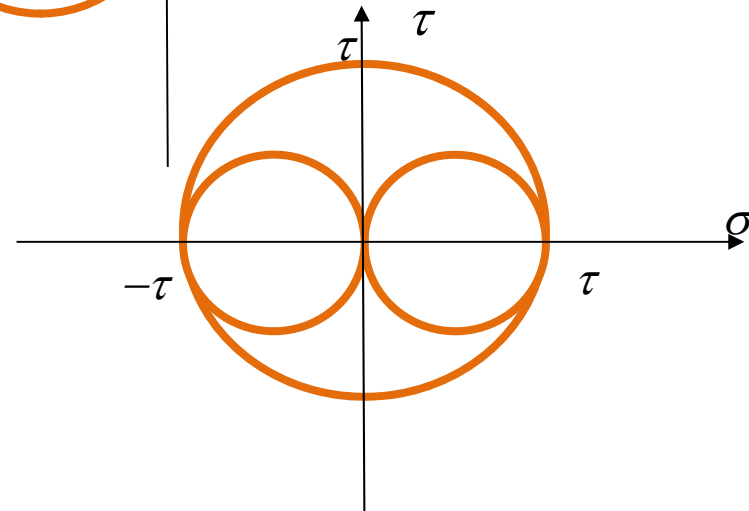
Compression simple

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma < 0$$



Cisaillement simple

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Fin

Comportement thermoélastique linéaire

1. **Lois de comportement des matériaux**
2. Observations expérimentales sur un essai de traction
3. Loi de comportement thermoélastique (LCTE) **linéaire**
4. LCTE linéaire **isotrope**
5. Propriétés des constantes élastiques

Lois de comportement des matériaux

1. Nécessité des lois de comportement

- **Expérience quotidienne :**

Des éprouvettes de même géométrie, soumises aux mêmes chargements et constituées de matériaux différents (acier, béton, caoutchouc, bois ...)
ne se déforment pas de la même manière

- **Bilan comptable des équations d'un problème d'équilibre:**

- **Inconnues** : tenseur des contraintes (6), champ de déplacement (3), champ de déformation (6) **TOTAL = 15 inconnues**
- **Equations** : Equilibre (3), Compatibilité géométrique des déformations (6).
TOTAL = 9 équations



Il manque 6 équations !

Relations entre efforts intérieurs et déformations

Lois de comportement des matériaux

2. Variété des comportements

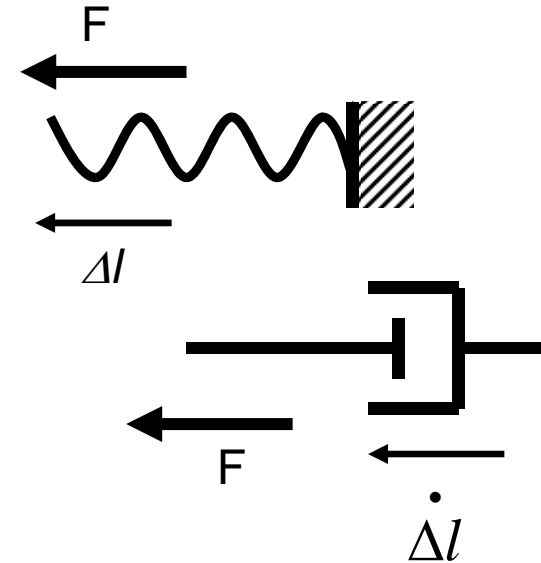
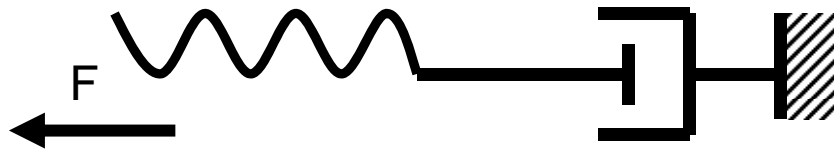
- comportement **élastique** : un ressort

$$F = k\Delta l$$

- comportement **visqueux**: un amortisseur

$$F = \eta \dot{\Delta l}$$

- comportement **viscoélastique** : fluide de Maxwell



$$\dot{\Delta l} = \frac{F}{\eta} + \frac{\dot{F}}{k}$$

- autres comportements: **plasticité**, élastoplasticité, élastoviscoplasticité ...

Comportement thermoélastique linéaire

1. Lois de comportement des matériaux
- 2. Observations expérimentales sur un essai de traction**
3. Loi de comportement thermoélastique (LCTE) linéaire
4. LCTE linéaire isotrope
5. Propriétés des constantes élastiques

Observations expérimentales

- **Essai de traction sur une éprouvette**



But de l'essai :

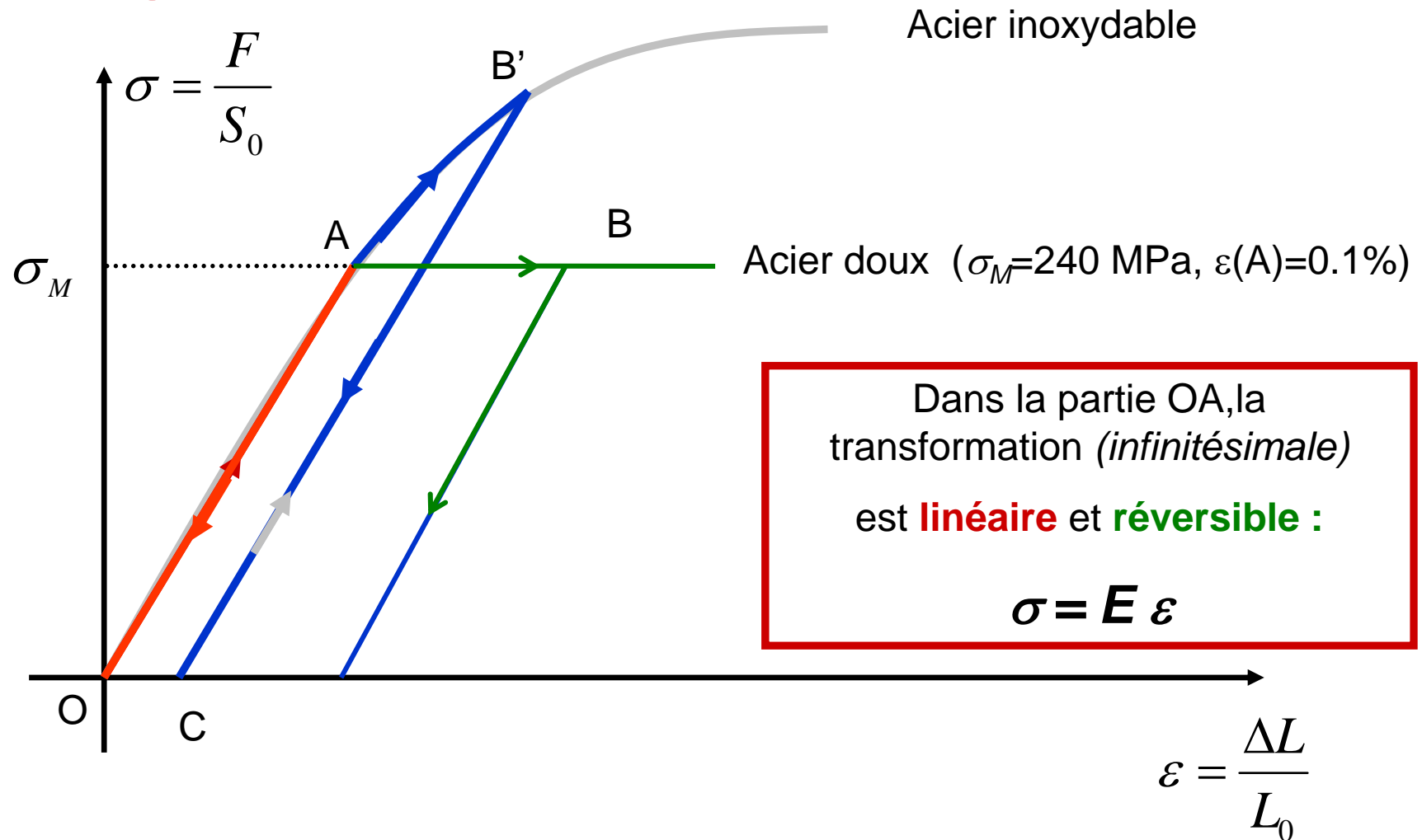
Mesures **GLOBALES**



Propriétés **LOCALES**
du matériau

Observations expérimentales

- **Diagramme de traction**



Comportement thermoélastique linéaire

1. Lois de comportement des matériaux
2. Observations expérimentales
- 3. Loi de comportement thermoélastique (LCT) linéaire**
4. LCT linéaire isotrope
5. Propriétés des constantes élastiques

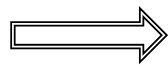
Loi de comportement thermoélastique linéaire

- Ecriture d'une relation linéaire entre:

$$\underline{\underline{\sigma}} \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \tau = T - T_0$$

en transformation infinitésimale $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$

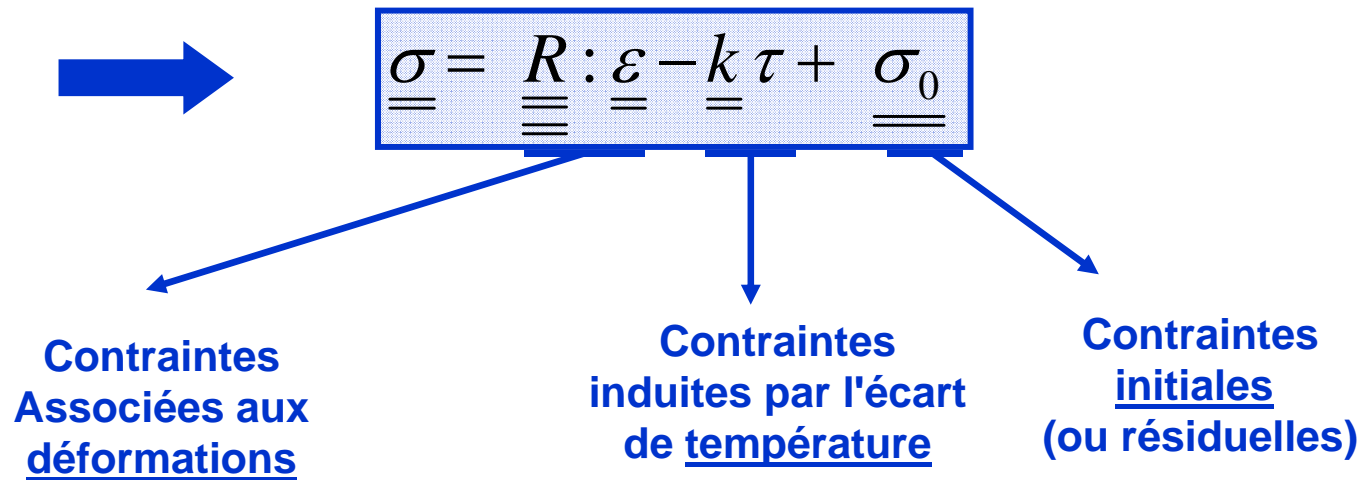
et pour de faibles écarts de température $|\tau| \ll T_0$,



$$\sigma_{ij} = R_{ijkl} \varepsilon_{lk} - k_{ij} \tau + \sigma_{0ij}$$

Loi de comportement thermoélastique linéaire

$$\sigma_{ij} = R_{ijkl} \varepsilon_{lk} - k_{ij} \tau + \sigma_{0ij}$$



Caractéristiques du matériau

$\underline{\underline{R}}$: tenseur (du 4^{ème} ordre) d'élasticité (*tenseur des modules ou rigidités élastiques*)

$\underline{\underline{k}}$: tenseur (du 2^{ème} ordre) de couplage thermoélastique

Loi de comportement thermoélastique linéaire

$$\sigma_{ij} = R_{ijkl} \varepsilon_{lk} - k_{ij} \tau + \sigma_{0ij}$$

Symétries de \underline{k} et \underline{R}

• La symétrie de $\underline{\sigma}$ $\implies k_{ij} = k_{ji}$ et $R_{ijkl} = R_{jikl}$

• La symétrie de $\underline{\varepsilon}$ $\implies R_{ijkl} = R_{ijlk}$

• 3^{ème} symétrie de \underline{R} $R_{ijkl} = R_{klij}$

Ainsi, les $3^4 = 81$ composantes de \underline{R} se déduisent de 21 composantes

Ce nombre (21) se réduit encore si le matériau présente des symétries matérielles.

Comportement thermoélastique linéaire

1. Lois de comportement des matériaux
2. Observations expérimentales
3. Loi de comportement thermoélastique (LCTE) linéaire
- 4. LCTE linéaire isotrope**
5. Propriétés des constantes élastiques

LCTE linéaire isotrope

- Isotropie : définition et propriétés**

Les propriétés élastiques des matériaux **isotropes** ne **dépendent pas de l'orientation** au sein de la matière (\Leftrightarrow Il n'existe pas de directions privilégiées).

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau$$

Conséquences :

(1) $\underline{\underline{k}}$ est sphérique : $\underline{\underline{k}} = k \underline{\underline{\delta}}$

(2) $\underline{\underline{}}^t \underline{\underline{O}} . \underline{\underline{\sigma}} . \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{}}^t \underline{\underline{O}} . \left(\underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) . \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{R}} : \left(\underline{\underline{}}^t \underline{\underline{O}} . \underline{\underline{\varepsilon}} . \underline{\underline{O}} \right)$

$$\forall \underline{\underline{O}} / \underline{\underline{}}^t \underline{\underline{O}} . \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{\delta}} \text{ et } \det(\underline{\underline{O}}) = +1.$$

LCTE linéaire isotrope

- Expression du tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k \tau \underline{\underline{1}}$$

Le tenseur des contraintes ne dépend plus que de deux caractéristiques élastiques : λ et μ appelés **coefficients de Lamé** (unité : Pa).

μ s'appelle aussi le **module de cisaillement**

LCTE linéaire isotrope

- Inversion de la loi de comportement linéaire isotrope**

On obtient par inversion :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{Tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} + \alpha \tau \underline{\underline{1}}$$



- **E** est le **module d'Young** (en MPa)
- **nu** est le **coefficient de Poisson** (sans dim.)
- **alpha** est le **coefficient de dilatation thermique linéique** (en °K⁻¹)

- Formules de passage entre coefficients**

(voir polycopié)

$$(\lambda, \mu, k) \leftrightarrow (E, \nu, \alpha)$$

Comportement thermoélastique linéaire

1. Lois de comportement des matériaux
2. Observations expérimentales
3. Loi de comportement thermoélastique (LCTE) linéaire
4. LCTE linéaire isotrope
- 5. Propriétés des constantes élastiques**

Propriétés des constantes élastiques

- **Stabilité du matériau thermoélastique linéaire**

Le tenseur des modules élastiques $\underline{\underline{R}}$ est **défini positif**

Pour le matériau isotrope on a:

$$\begin{cases} 2\mu + 3\lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} E > 0 \\ -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{cases}$$

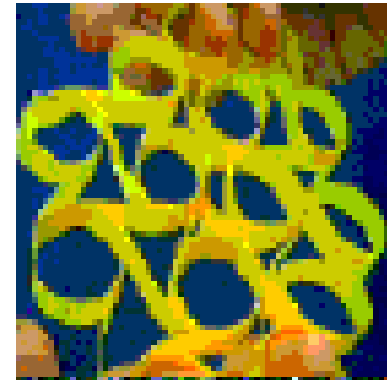
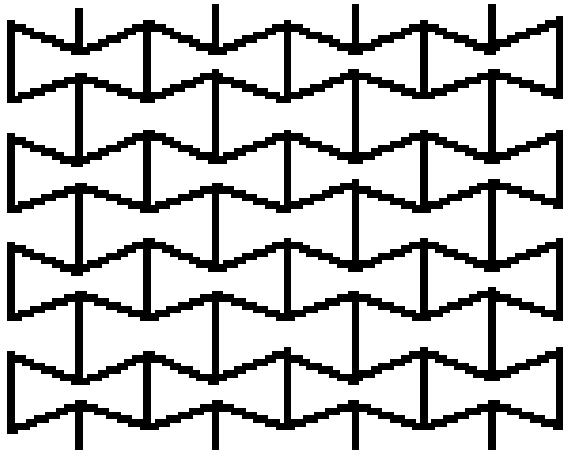
Propriétés des constantes élastiques

- **Signification physique des conditions de stabilité**

- $E > 0$ \Leftrightarrow L'allongement est **positif** dans le sens de la **traction**
- $0 < \nu < 1/2$ \Leftrightarrow La section **diminue** lors d'une expérience de **traction**
- $\nu = 1/2$ \Leftrightarrow Matériau **incompressible** (ex: caoutchouc)
- $\nu = 0$ \Leftrightarrow Section **constante** lors d'une expérience de **traction** ($\nu = 0.05$ pour le béryllium)
- $-1 < \nu < 0$: jamais observé sur des matériaux naturels.
- $2\mu + 3\lambda > 0$ \Leftrightarrow Le matériau **diminue** de volume sous l'effet d'une **compression**
- $\mu > 0$ \Leftrightarrow Le **cisaillement** s'effectue **dans le sens de l'effort**

Propriétés des constantes élastiques

Il existe des matériaux **artificiels** (éponges) dont la section **croît** avec la **traction** (coefficient de Poisson **négatif**).



- Lakes, R. S., "Negative Poisson's ratio materials", *Science*, 238 551 (1987).



MERCI !

Problème d'équilibre **thermoélastique linéaire** (TEL)

Quelques solutions classiques **exactes**

- **Equations du problème d'équilibre TEL**
(hypothèses, CL, existence et unicité des solutions)
- Méthode des déplacements pour les matériaux isotropes
- Méthode des contraintes pour les matériaux isotropes
- Principe de Saint-Venant

Equations du problème d'équilibre TEL

Equations d'équilibre:

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0}$$

Loi de comportement TEL :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{k} \tau$$

Compatibilité géom. des déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla \xi}} \right)$$

CL

▪ 15 champs scalaires inconnus: $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\xi}}$ et 15 EDP

▪ Champs donnés: τ , \underline{f} , \underline{k} et $\underline{\underline{R}}$

Equations du problème d'équilibre TEL

- **Hypothèse d'évolution quasi-statique**
- **Hypothèses des Petites Perturbations (HPP)**

– Petites **transformations** :

$$\|\underline{\nabla \xi}\| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \|\varepsilon\| \ll 1$$

– Petites **variations de température** :

$$\frac{|\tau|}{T_0} \ll 1$$

– Petits **déplacements** :

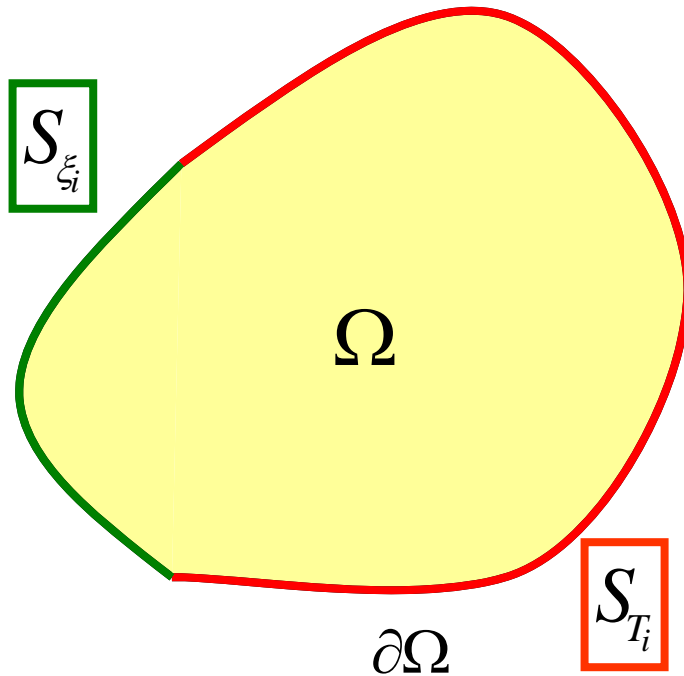
$$\frac{\|\xi\|}{L} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_t \approx \Omega_0$$

Equations du problème d'équilibre TEL

- Conditions aux limites**

$$\forall \vec{x} \in \partial\Omega \text{ et } \forall i=1,2,3:$$

$$T_i(\vec{x}) (= \sigma_{ij}(\vec{x})n_j) = T_i^d \quad \text{ou} \quad \xi_i(\vec{x}) = \xi_i^d$$



$$S_{T_i} = \left\{ \vec{x} \in \partial\Omega / T_i(\vec{x}) = T_i^d \right\}$$

$$S_{\xi_i} = \left\{ \vec{x} \in \partial\Omega / \xi_i(\vec{x}) = \xi_i^d \right\}$$

$$S_{T_i} \cup S_{\xi_i} = \partial\Omega$$

$$mes(S_{T_i} \cap S_{\xi_i}) = 0$$

Equations du problème d'équilibre TEL

- Bilan des équations du problème aux limites

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} \right) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^d \quad \text{sur } S_{T_i} \\ \xi_i = \xi_i^d \quad \text{sur } S_{\xi_i} \\ i = 1, 2, 3 \quad S_{T_i} \cup S_{\xi_i} = \partial\Omega \quad \text{mes}(S_{T_i} \cap S_{\xi_i}) = 0 \end{array} \right.$$

Théorème: Pour un pb (P) "bien posé" la solution $\underline{\underline{\sigma}}$ existe et est unique.

$\underline{\underline{\xi}}$ existe et est unique à un dépl. de solide rigide près ξ^r vérifiant $\xi_i^r = 0$ sur S_{ξ_i}

Champs **SA** et Champs **CA**

- Champs de contrainte statiquement admissibles (SA)

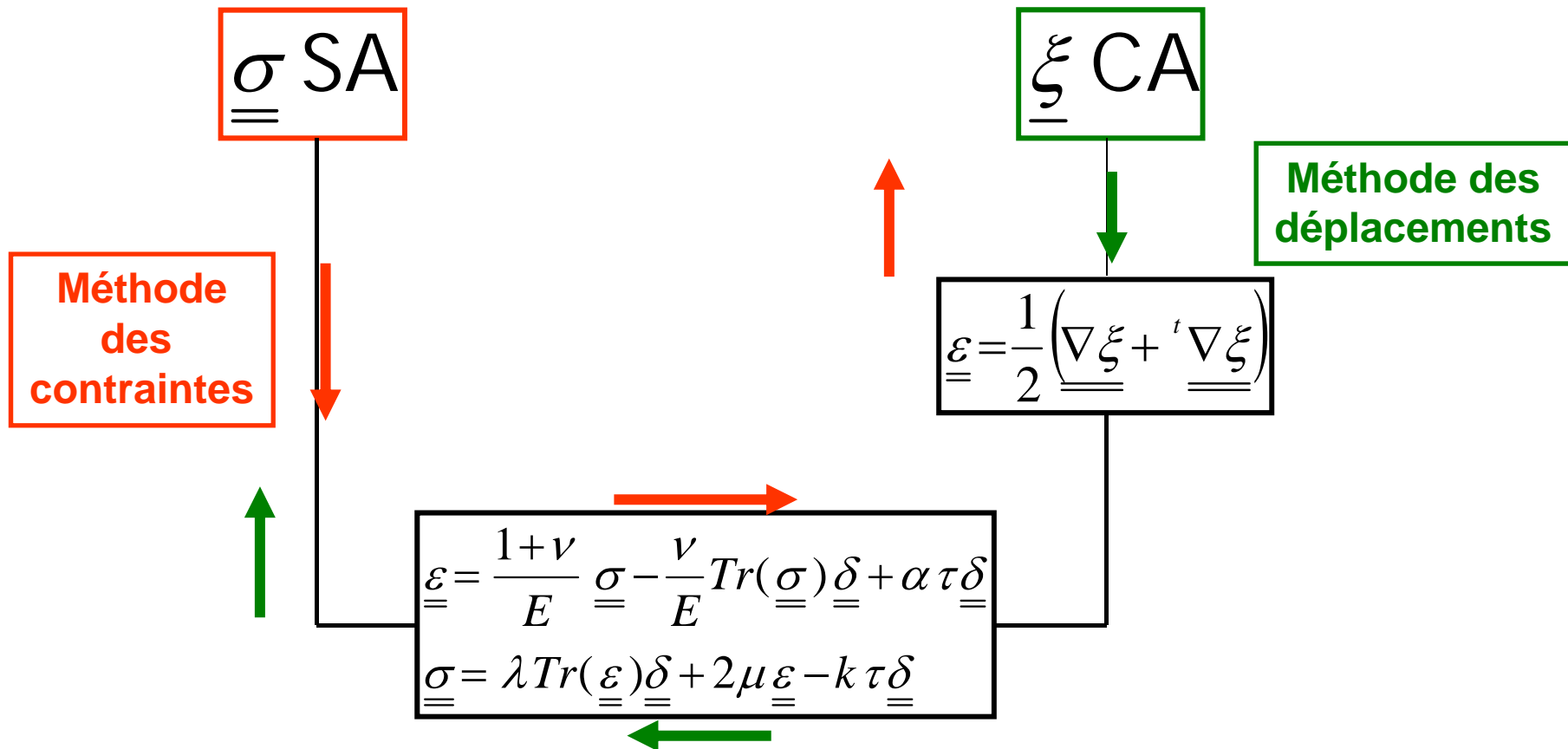
$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ SA} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = 0 \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^d \text{ sur } S_{T_i}, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- Champs de déplacement cinématiquement admissibles (CA)

$$\underline{\underline{\xi}} \text{ CA} \Leftrightarrow \xi_i = \xi_i^d \text{ sur } S_{\xi_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Résolution du problème d'équilibre TEL

Méthodes de résolution




Problème d'équilibre **thermoélastique linéaire** (TEL)

Quelques solutions classiques **exactes**

- Equations du problème d'équilibre TEL
(hypothèses, CL, existence et unicité des solutions)
- **Méthode des déplacements pour les matériaux isotropes**
- Méthode des contraintes pour les matériaux isotropes
- Principe de Saint-Venant

Equations de Navier

- Cas d'un équilibre **isotherme** ($\tau = 0$)
- Idée générale : combiner les équations d'équilibre et la loi de comportement  **EDP sur** $\underline{\xi}$

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ div } [(\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}}] + 2 \mu \text{ div } \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu) \underline{\underline{\nabla}} (\text{div } \underline{\underline{\xi}}) + \mu \text{ div } (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}}) + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{\xi}) - \mu \text{ rot} (\text{rot } \vec{\xi}) + \vec{f} = \vec{0}$$

Méthode des déplacements

- **Exemple : Réservoir sphérique sous pressions**

- Evolution isotherme ($\tau = 0$), quasi-statique et en HPP,
- Forces volumiques nulles,
- Rayon intérieur r_0 ; Pression intérieure P_0
- Rayon extérieur r_1 ; Pression extérieure P_1 .
- Matériau TEL homogène et isotrope (E, ν)

C.L. : $r = r_0, \vec{n} = -\vec{e}_r, \vec{T} = P_0 \vec{e}_r \Rightarrow \sigma_{rr} = -P_0, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{r\varphi} = 0$
 $r = r_1, \vec{n} = +\vec{e}_r, \vec{T} = -P_1 \vec{e}_r \Rightarrow \sigma_{rr} = -P_1, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{r\varphi} = 0$

Pb bien posé.

Cas particulier $P_0 = P_1 = P$. Solution :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P \underline{\underline{\delta}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{1-2\nu}{E} P \underline{\underline{\delta}}, \quad \underline{\underline{\xi}} = -\frac{1-2\nu}{E} P r \vec{e}_r$$

Méthode des déplacements

- Recherche d'une solution $\vec{\xi}$ sous la forme:

$$\vec{\xi} = u(r) \vec{e}_r$$

- Equation de Navier sur $\vec{\xi}$:

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{\xi}) - \mu \text{rot} (\text{rot } \vec{\xi}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (u(r) \vec{e}_r)) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) = \vec{0}$$

$$\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} = \text{constante}$$

$$u(r) = A r + \frac{B}{r^2}$$

Méthode des déplacements

$$\vec{\xi} = u(r) \vec{e}_r = \left(A r + \frac{B}{r^2} \right) \vec{e}_r \quad \underline{\underline{\nabla \vec{\xi}}} = \begin{bmatrix} \frac{dU}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U}{r} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Les CL $\sigma_{rr}(r_0) = -P_0$, $\sigma_{rr}(r_1) = -P_1$ \implies

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = a - \frac{b}{r^3} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{2r^3} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\theta} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \\ b = (P_0 - P_1) \frac{r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\xi}} = \left(A r + \frac{B}{r^2} \right) \underline{\underline{e}}_r \quad A = \frac{a}{E} (1 - 2\nu) \quad B = \frac{b}{2E} (1 + \nu)$$

Problème d'équilibre **thermoélastique linéaire** (TEL)

Quelques solutions classiques **exactes**

- **Equations du problème d'équilibre TEL**
(hypothèses, CL, existence et unicité des solutions)
- **Méthode des déplacements pour les matériaux isotropes**
- **Méthode des contraintes pour les matériaux isotropes**
- **Principe de Saint-Venant**

Rappel: Equations du problème d'équilibre TEL

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} \right) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{k} \tau \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^d \quad \text{sur } S_{T_i} \\ \xi_i = \xi_i^d \quad \text{sur } S_{\xi_i} \\ i = 1, 2, 3 \quad S_{T_i} \cup S_{\xi_i} = \partial\Omega \quad \text{mes}(S_{T_i} \cap S_{\xi_i}) = 0 \end{array} \right.$$

Théorème: Pour un pb (P) "bien posé" la solution $\underline{\underline{\sigma}}$ existe et est unique.

La solution $\underline{\xi}$ existe et est unique à un déplacement de solide rigide près ξ^r

vérifiant $\xi_i^r = 0$ sur S_{ξ_i}

Rappel : champs SA et CA

- Champs de contrainte statiquement admissibles (SA)

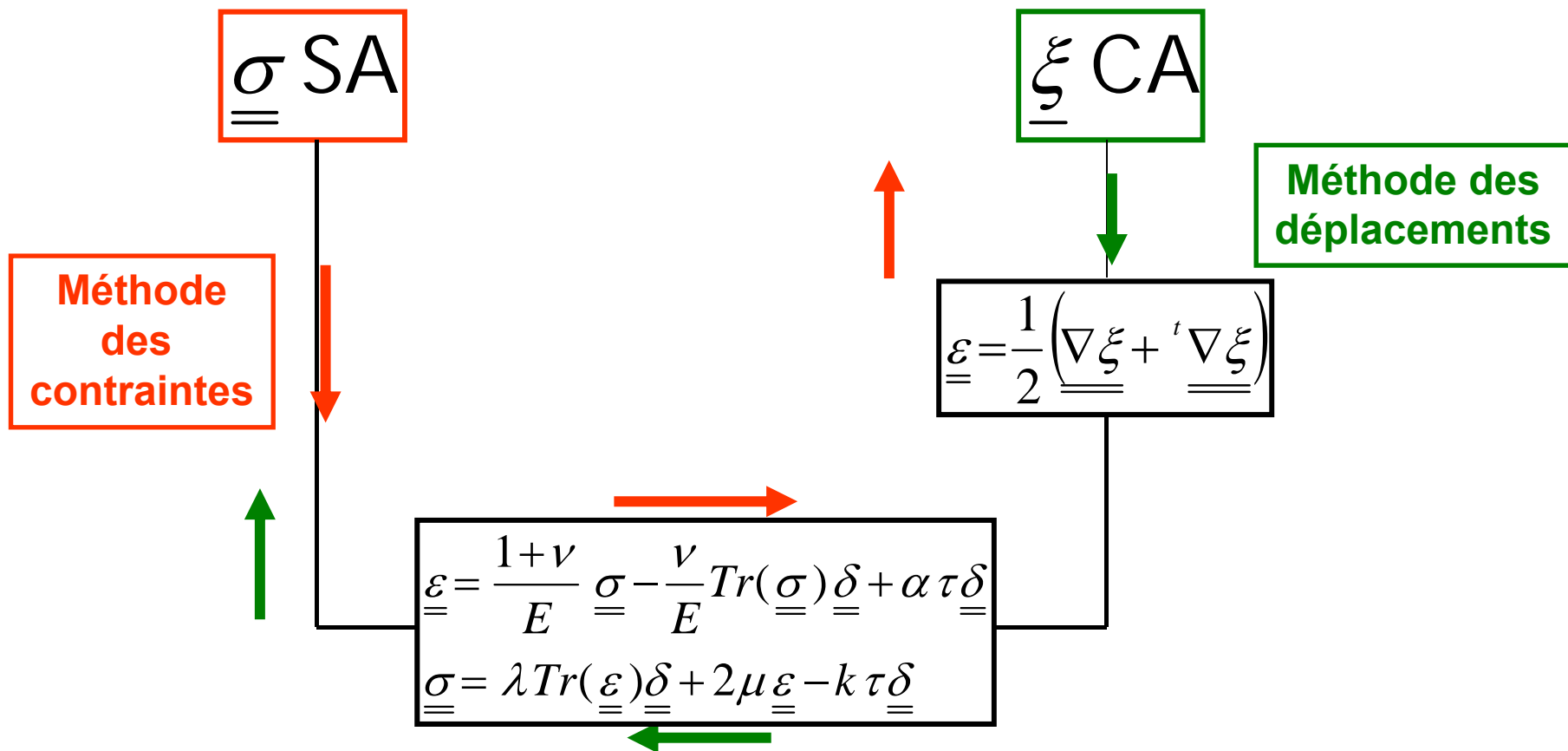
$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ SA} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = 0 \\ \sigma_{ij} n_j = \underline{\underline{T}}_i^d \text{ sur } S_{T_i}, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- Champs de déplacement cinématiquement admissibles (CA)


$$\underline{\underline{\xi}} \text{ CA} \Leftrightarrow \xi_i = \xi_i^d \text{ sur } S_{\xi_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Résolution du problème d'équilibre TEL

- Méthodes de résolution



Equations de compatibilité

- La **méthode des contraintes** suppose une **intégration** de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ vers $\underline{\underline{\xi}}$
 - Tous les tenseurs d'ordre 2 ne donnent pas un champ de déplacement par intégration
- 
- Les composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ doivent satisfaire les **6 conditions de compatibilité** qui, en coordonnées cartésiennes, s'écrivent :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad \text{où} \quad A_{,pq} = \frac{\partial^2 A}{\partial X_p \partial X_q}$$

$$(i, j, k, l) \in \left\{ \begin{array}{l} (1,1,2,2), (2,2,3,3), (3,3,1,1), \\ (1,1,2,3), (2,2,3,1), (3,3,1,2) \end{array} \right\}$$

Equations de compatibilité

- Un champ $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ constant (transf.homogène) est Géom. Comp. :

$$\vec{\xi}(\vec{X}) = \underline{\underline{\mathcal{E}}} \cdot \vec{X} + \vec{\xi}^0 + \vec{\omega} \wedge \vec{X}$$

- Un champ $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ dont les composantes sont affines / X_i est Géom. Comp.

- Un champ sphérique $\underline{\underline{\mathcal{E}}} = \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\delta}}$ est Géom. Comp.

si et ssi $\underline{\underline{e}}$ est affine / X_i

Equations de Beltrami

- En combinant :
 - Equations de **compatibilité**
 - Equations d'**équilibre**
 - Loi de comportement homogène **isotrope**
- Avec la condition
 - Champ de force volumique **\underline{f} uniforme**



Equations de Beltrami
(6 équations scalaires)



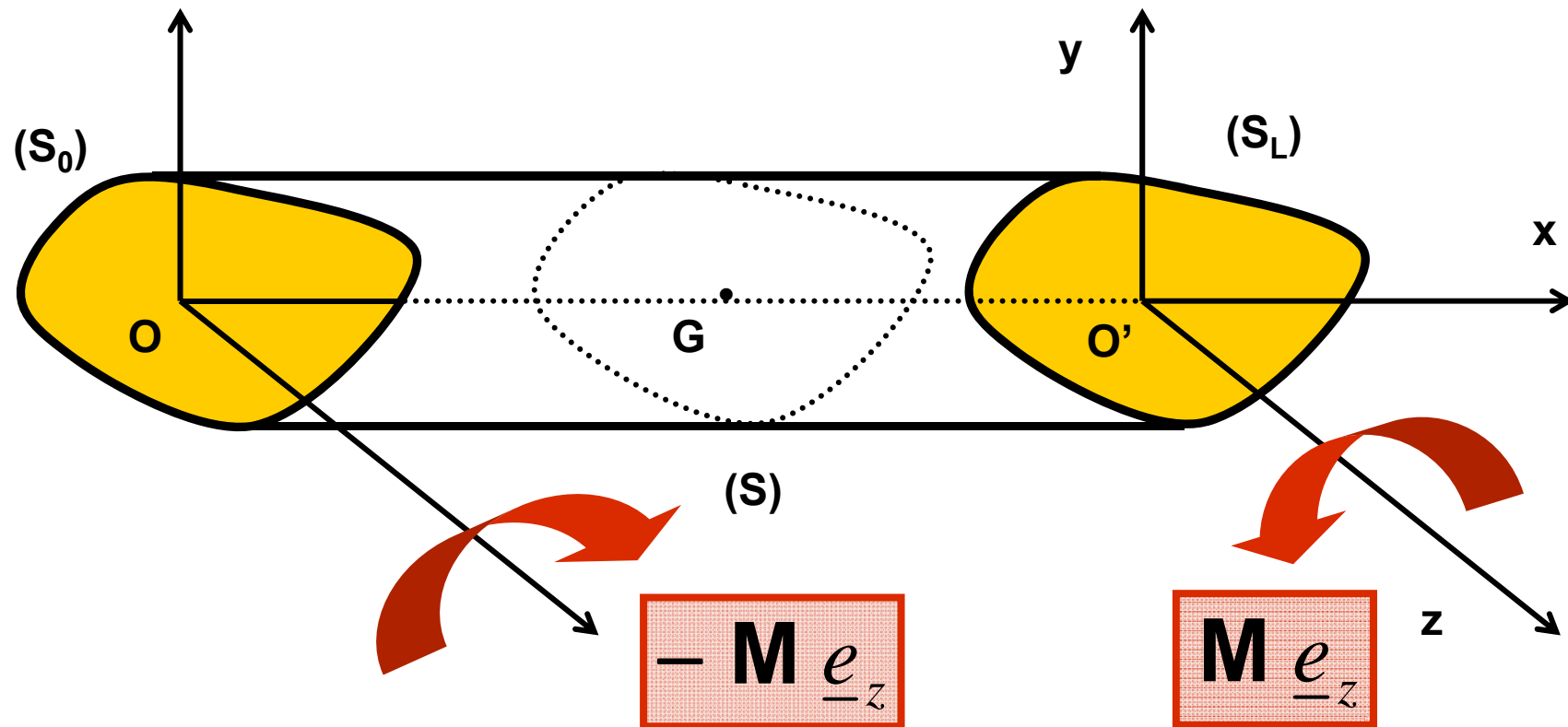
En coordonnées cartésiennes :

$$(1+\nu) \Delta \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 [\text{Tr } \sigma]}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Applications :

- Cas où toutes les **conditions aux limites** sont en **contraintes**
- Calcul en **géométrie plane**

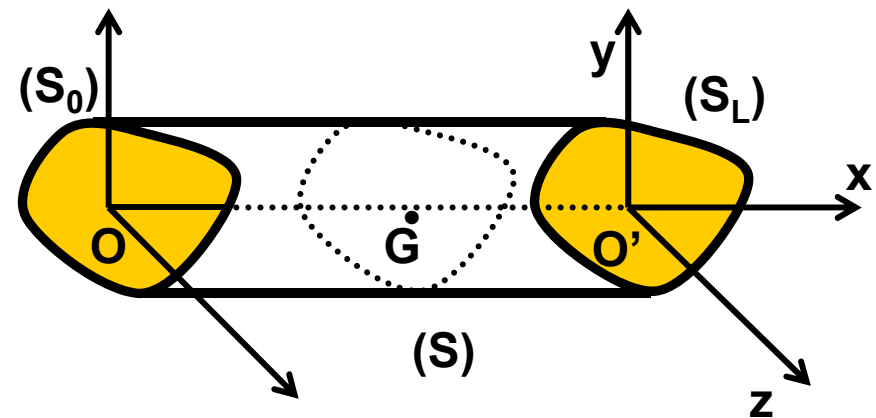
Méthode des contraintes – Flexion plane



Hypothèses : $\tau = 0 ; \underline{f} = 0 ; \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$ sur S_{lat}

Flexion plane – conditions aux limites

- Surface latérale : $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ sur S_{lat}



- Surfaces S_0 et S_L :

$$\int_{S_0} \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_x) da = \underline{0}; \quad \int_{S_0} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_x) da = -M \underline{e}_z$$

$$\int_{S_L} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x da = \underline{0}; \quad \int_{S_L} \underline{O'M} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x da = M \underline{e}_z$$

Sur S_0 et S_L : données en torseurs ; CL du type Saint-Venant

Flexion plane – recherche d'un champ SA

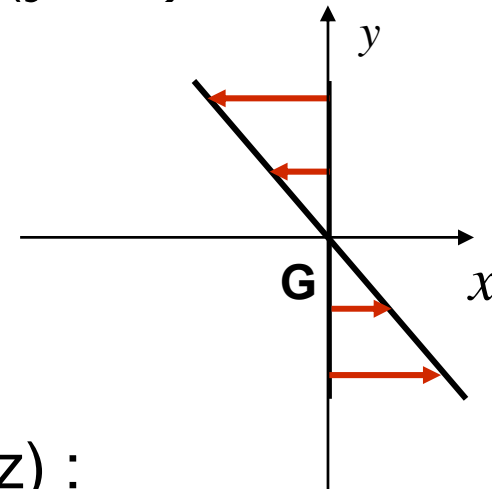
- Intuition : **compression** des fibres supérieures ($y > 0$)
traction des fibres inférieures ($y < 0$).

- Recherche de $\underline{\underline{\sigma}}$ sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \beta y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ et Eq. Beltrami vérifiées

- Les **C.L** en S_0 ou S_L + prop. repère (x,y,z) :

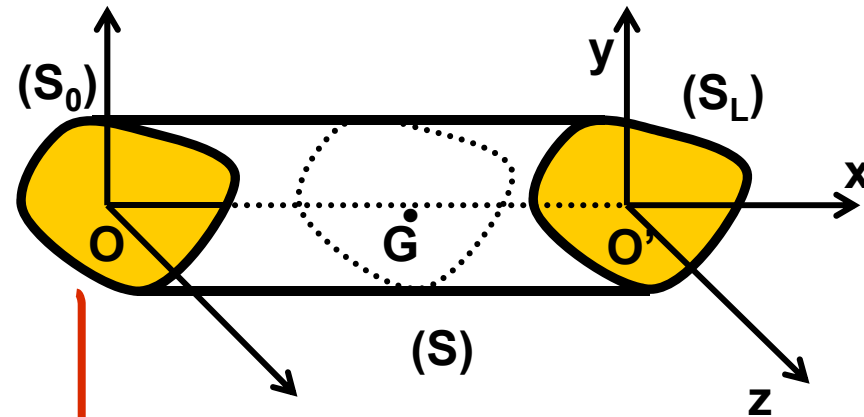


$$\beta \int_{S_L} (y \underline{e}_y + z \underline{e}_z) \wedge y \underline{e}_x da = - \left[\beta \int_{S_L} y^2 da \right] \underline{e}_z = \mathbf{M} \underline{e}_z$$



$$\beta = - \mathbf{M} / I_z$$

Flexion plane – géométrie et axes d'inertie

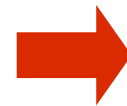


- **Axe x** : relie les **centres d'inertie** des **sections droites**
- **Origine des axes y et z** située au centre d'inertie de la section (S)



$$\int_S y da = \int_S z da = 0$$

- Axes y et z orientés suivant les **axes principaux d'inertie**
- Moments d'inertie **principaux (inertie de flexion)**



$$\int_S y z da = 0$$



$$I_y = \int_S z^2 da ; I_z = \int_S y^2 da$$

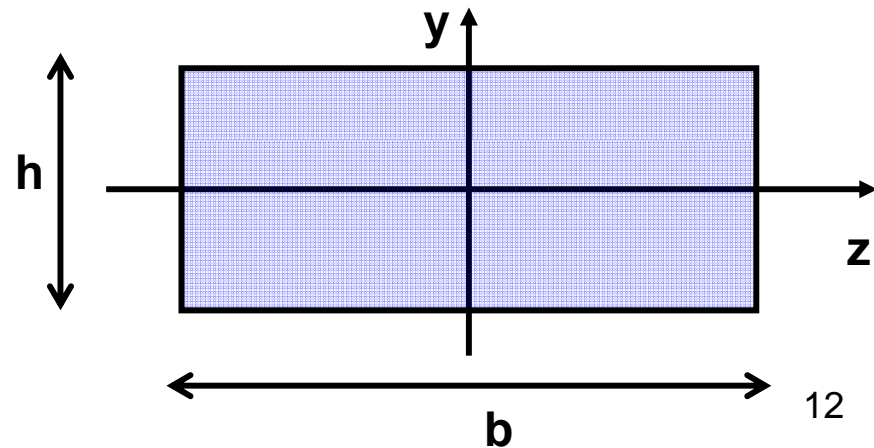
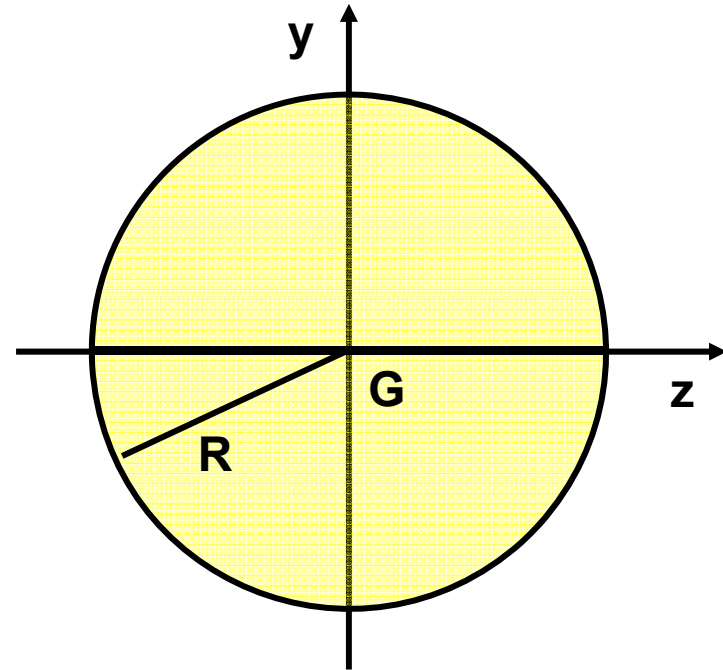
Flexion plane – Exemples de moments d'inertie

- Section circulaire - homogène

$$I_z = \int_S y^2 da = \frac{\pi R^4}{4} = I_y$$

- Section rectangulaire - homogène

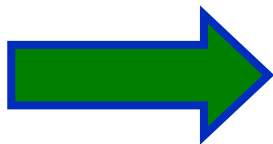
$$I_z = \int_S y^2 da = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$
$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$



Flexion plane – tenseur des déformations

- Application de la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (Tr \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} =$$
$$-\frac{\mathbf{M}}{E I_z} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{\nu \mathbf{M}}{E I_z} y (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$$



Le tenseur des déformations
n'est **pas uniaxial**

Flexion plane – champ de déplacement

- Par intégration de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on obtient le champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\xi}} \begin{cases} \xi_x = -\frac{M}{EI_z} y x \\ \xi_y = \frac{M}{EI_z} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\nu}{2} (y^2 - z^2) \right] \\ \xi_z = \frac{\nu M}{EI_z} y z \end{cases}$$

+
Un mouvement rigidifiant
(translation + rotation)

Rappel : **condition HPP**

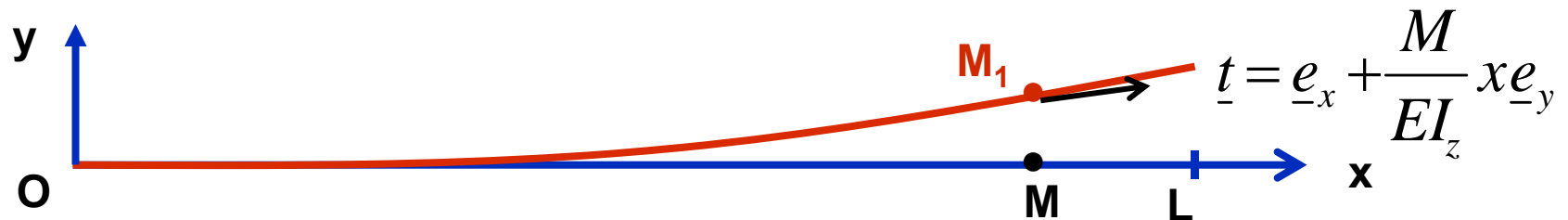
$$\frac{\|\underline{\underline{\xi}}\|}{D} \ll 1$$



$$\frac{MD}{EI_z} \ll 1$$

Flexion plane – géométrie de la transformation

$$\underline{\xi}(x,0,0) = \frac{M}{EI_z} \frac{x^2}{2} \underline{e}_y$$



(Parabole=Cercle osculateur de centre O et de rayon EI_z/M)

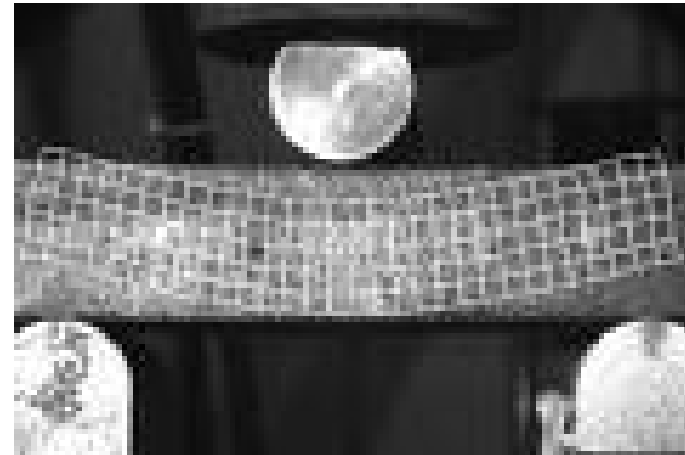
Les sections droites restent planes et \perp à \underline{t}

La section d'abscisse x tourne autour de \underline{e}_z d'un angle

$$\theta(x) = \frac{M}{EI_z} x$$

Essais de flexion

Flexion 3 points



Flexion 4 points



Principe de Saint-Venant (1855)

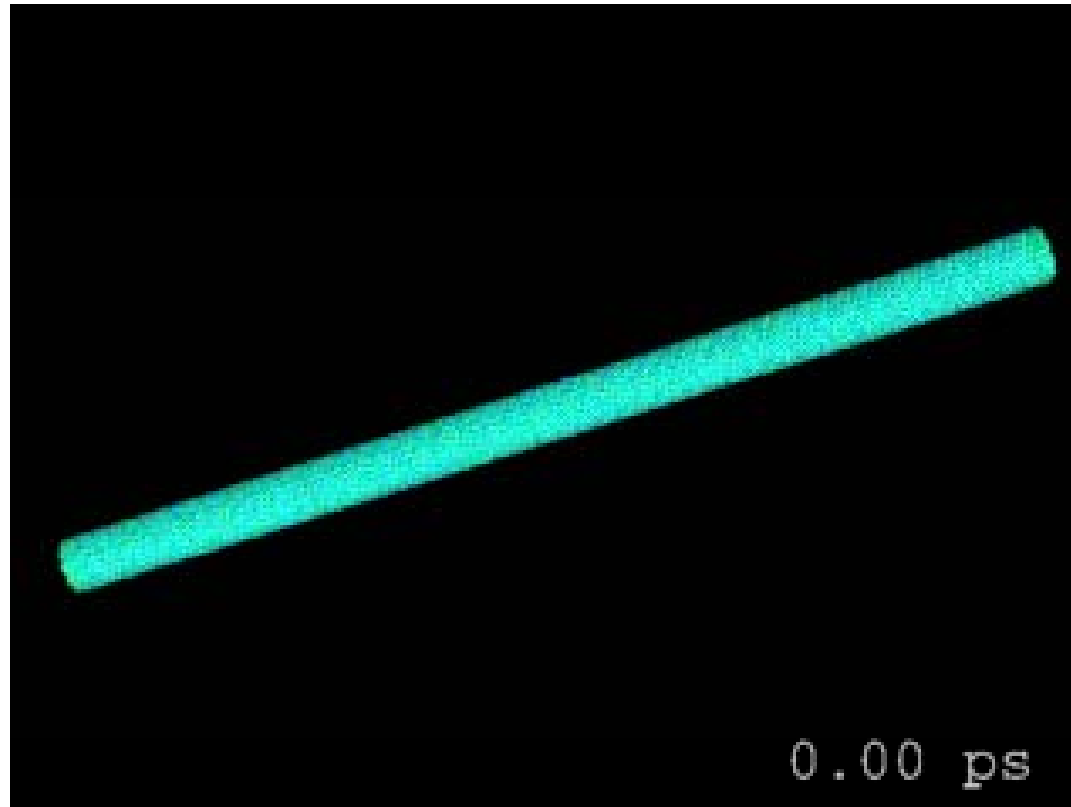
- **Principe** (non démontré)

"les champs de contrainte et de déplacement dans une région suffisamment éloignée des frontières sont quasiment inchangés si l'on remplace une distribution d'efforts sur ces frontières par une autre distribution équivalente de torseur identique."

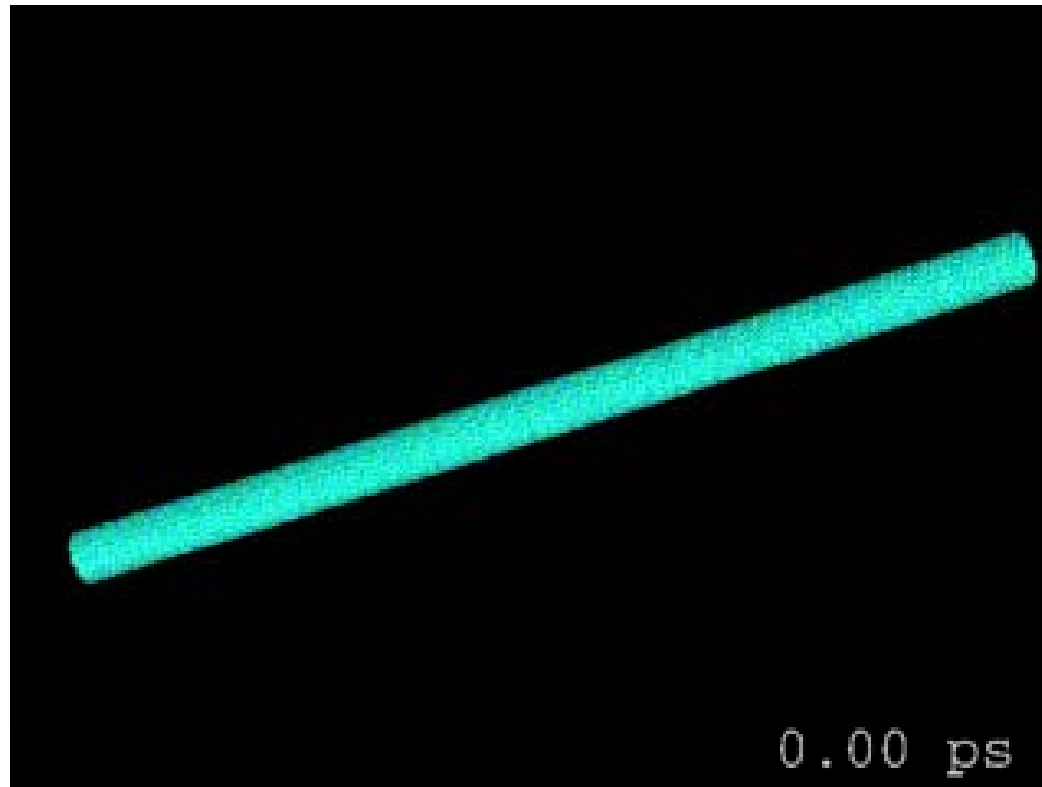


**Adhémar Jean-Claude
Barré de Saint-Venant
(1797- 1886)**

Flexion d'un nanotube de carbone



Torsion d'un nanotube de carbone



Nanotubes de carbone

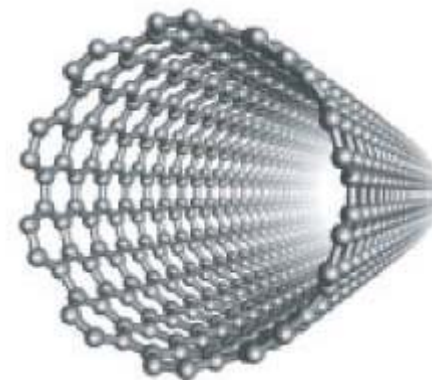
Observés pour la première fois en 1991, les nanotubes se présentent comme des tubes creux concentriques séparés de 0,34 nm avec un diamètre interne de l'ordre du nanomètre et une longueur de l'ordre de quelques microns.

Un tel filament présente une résistance 100 fois supérieure à l'acier, pour un poids divisé par six.

Historique

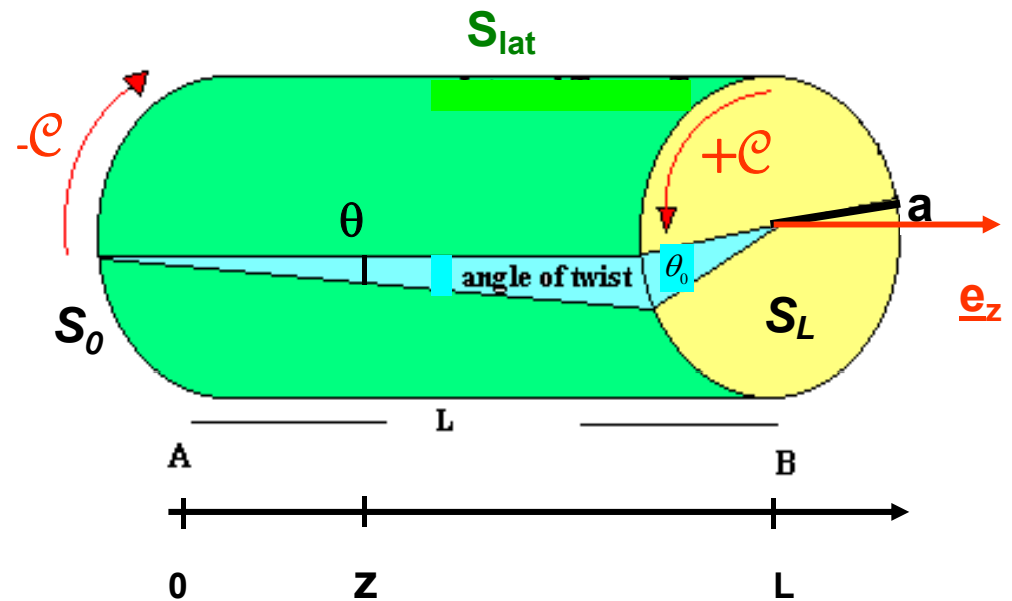
Jusqu'en 1985, les seules formes cristallisées connues de carbone pur étaient le [graphite](#) et le [diamant](#).

En 1985 trois chercheurs R. Smalley, R. Curl (Rice University, Houston, USA) et H. Kroto (University of Sussex, Grande Bretagne) ont découvert une nouvelle forme de carbone, le **C60 constituée de 60 atomes de carbone** répartis sur les sommets d'un polyèdre régulier constitué de facettes hexagonales et pentagonales.



- **Torsion d'un arbre circulaire**

- Equilibre **isotherme** : $\tau = 0$.
- Moments $+C \underline{e}_z$ et $-C \underline{e}_z$ exercés aux extrémités.
- Surface latérale libre de contraintes.
- Rayon a (section droite).

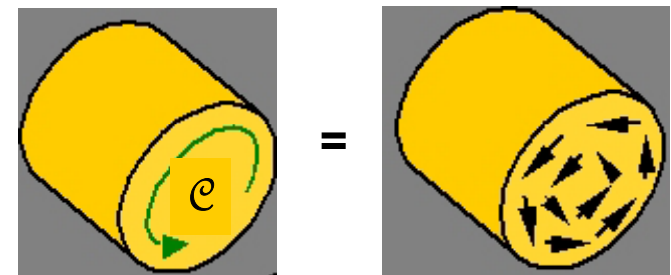
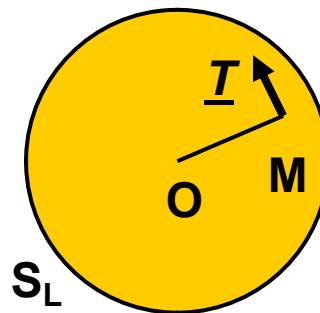


- **Torsion d'un arbre circulaire**

- Conditions aux Limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en } S_{lat} \quad \underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \\ \text{en } S_0 \text{ et } S_L \quad \underline{C} = \int_S \underline{OM} \wedge \underline{T} da \quad \text{et} \quad \underline{R} = \underline{0} \end{array} \right.$$

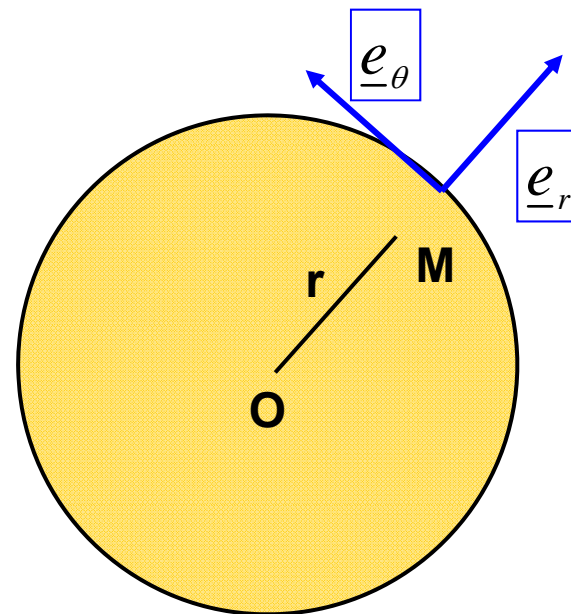
**Conditions GLOBALES
à respecter pour \underline{T} :**
en Résultante
et en Moment



- **Torsion d'un arbre circulaire**

- Recherche d'un champ de déplacement Cinématiquement Admissible (CA).

$$\text{en } z: \underline{\theta} = \beta z \underline{e}_z \Rightarrow \text{rotation } \underline{\xi} = \underline{\theta} \wedge \underline{OM}$$
$$\text{avec } \underline{OM} = r \underline{e}_r \Rightarrow \underline{\xi} = \beta r z \underline{e}_\theta$$

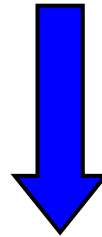


- **Torsion d'un arbre circulaire**

- tenseur des déformations

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} \right) = \frac{1}{2} \beta r \left(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta \right)$$

Loi de
comportement



- tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \beta \mu r \left(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta \right)$$

- **Torsion d'un arbre circulaire**

- Vérification du caractère **Statiquement Admissible** de $\underline{\underline{\sigma}}$

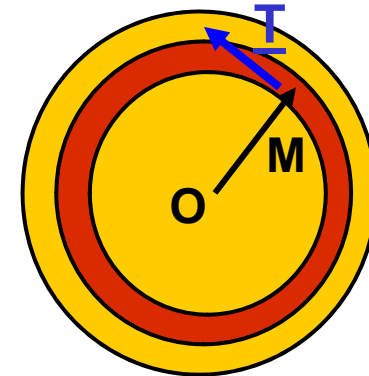
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_r = 0 \Big|_{r=a} \text{ (sur } S_{lat} \text{)} \\ \int_S \underline{OM} \wedge \underline{T} da = \pm C \underline{e}_z \text{ (en } S_0 \text{ et } S_L \text{)} \end{array} \right.$$

OK !

OK !



- **Torsion d'un arbre circulaire**
 - inertie de torsion



- La troisième condition se réécrit (par exemple en S_L) :

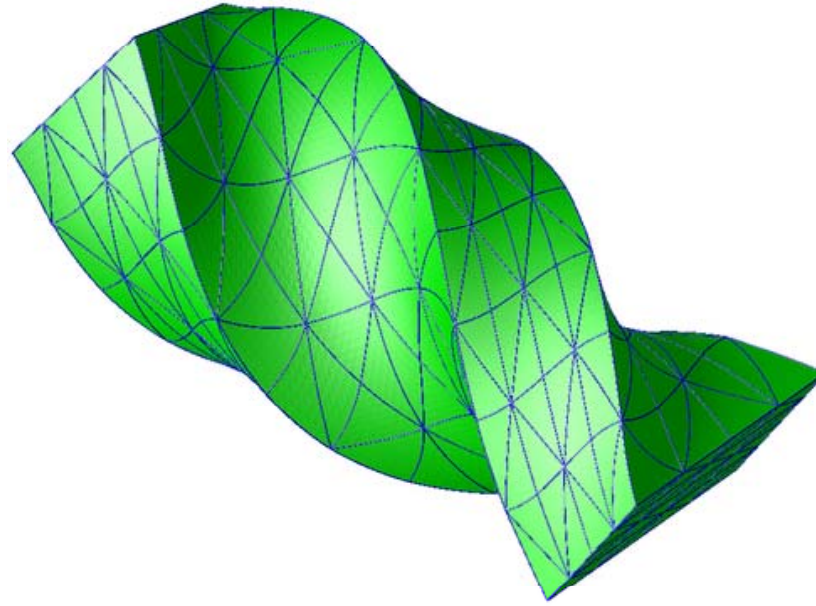
$$\int_{S_L} \underline{OM} \wedge \underline{T} da = \int_{S_L} (r \underline{e}_r \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z) 2 \pi r dr = \left[2 \pi \mu \beta \int_0^a r^3 dr \right] \underline{e}_z = \underbrace{\pi \mu \beta \frac{a^4}{2}}_C \underline{e}_z$$

On en déduit la relation cherchée entre **C** et β :

$$\mathbf{C} = \beta \mu \mathbf{J}$$

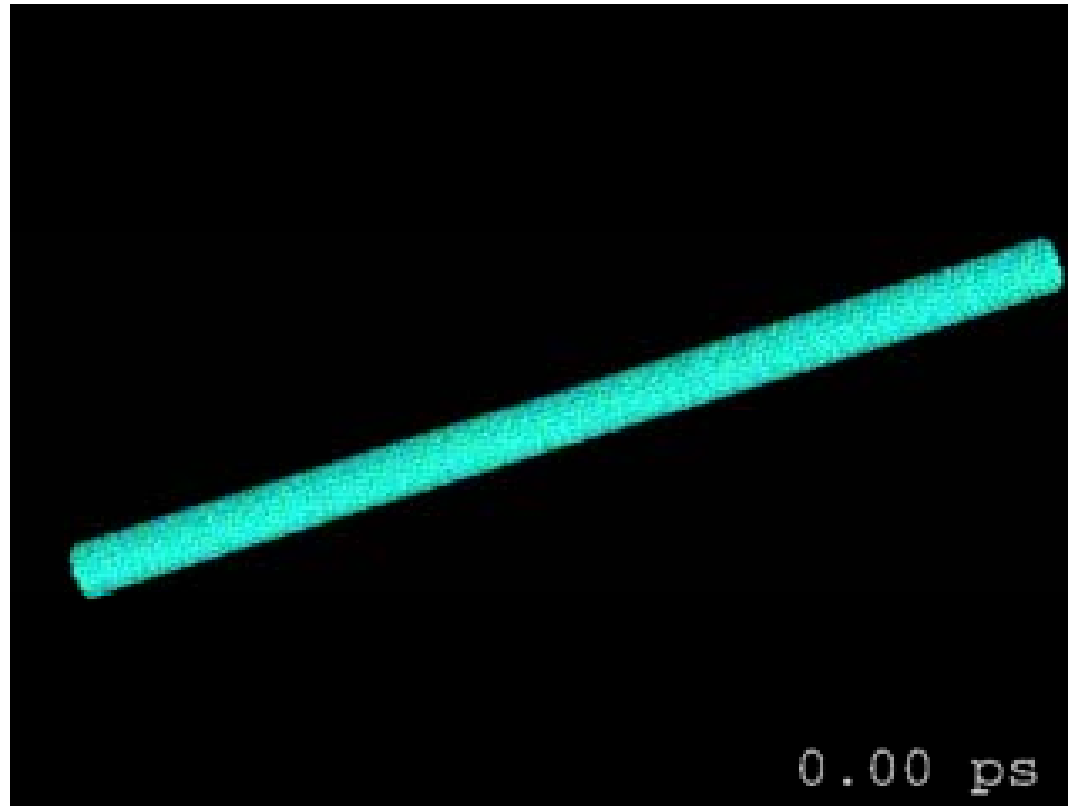
où $J = \pi \frac{a^4}{2}$ est l'inertie de torsion
du cylindre

Autre exemple de torsion



....pour laquelle il n'existe pas de solution analytique aussi simple...

Torsion d'un nanotube de carbone...

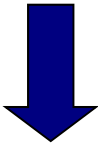


www.ipt.arc.nasa.gov

Problème d'équilibre élastique linéaire
Théorèmes énergétiques et Solutions approchées

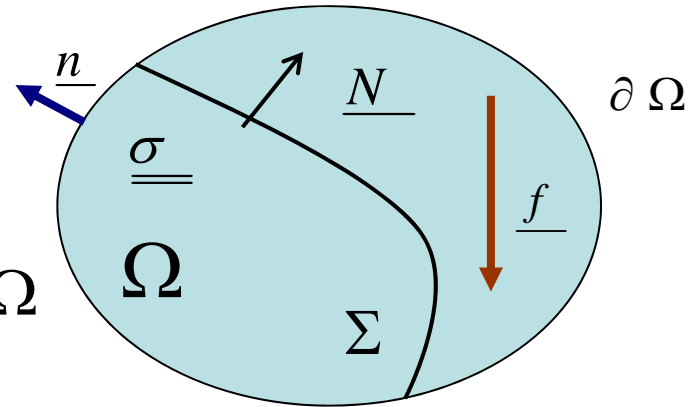
- Théorème des **Travaux Virtuels (TTV)**
- **Théorème du minimum** de l'énergie potentielle
- **Théorème du minimum** de l'énergie potentielle complémentaire
- Combinaison des deux théorèmes
- Applications

Nécessité des solutions approchées

- Difficulté (voire impossibilité) d'obtenir des solutions **exactes** au problème d'équilibre EL dans plusieurs situations :
 - Géométrie complexe
 - Inhomogénéité matérielle
 - ...
- 
- Recherche d'une **formulation "faible"** du problème, basée sur des **considérations énergétiques**.

Théorème des Travaux Virtuels (TTV)

$\forall \underline{\underline{\sigma}}$ vérifiant $div \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}$ dans Ω



P.P.V

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : d(\underline{\underline{V}}^*) d\Omega + \int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \llbracket \underline{\underline{V}}^* \rrbracket = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{V}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{V}}^* \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} da$$

$\forall \underline{\underline{V}}^* \in C^1 / \text{morceaux} ; \Sigma : \text{éventuelle surface de discontinuité de } \underline{\underline{V}}^*$

H.P.P

T.T.V.

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}^*) d\Omega + \int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \llbracket \underline{\underline{\xi}}^* \rrbracket = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\xi}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}}^* \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} da$$

$\forall \underline{\underline{\xi}}^* \in C^1 / \text{morceaux} ; \Sigma : \text{éventuelle surface de discontinuité de } \underline{\underline{\xi}}^*$

Equations du problème d'équilibre en élasticité linéaire

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} \right) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^d \quad \text{sur } S_{T_i} \\ \xi_i = \xi_i^d \quad \text{sur } S_{\xi_i} \\ i = 1, 2, 3 \quad S_{T_i} \cup S_{\xi_i} = \partial\Omega \quad \text{mes}(S_{T_i} \cap S_{\xi_i}) = 0 \end{array} \right.$$

(P) “bien posé”; solution $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\xi}}$

Théorème du minimum de l'énergie potentielle

$$W(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}') : \underline{\underline{R}} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}') d\Omega$$

: Energie élastique de déformation de $\underline{\xi}'$ CA

$$\Phi(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\xi}' d\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^d \xi_i' dS$$

: Travail des efforts extérieurs donnés dans le déplacement CA $\underline{\xi}'$

$$E_p(\underline{\xi}') = W(\underline{\xi}') - \Phi(\underline{\xi}')$$

Th: Le champ de déplacement $\underline{\xi}$ solution du problème d'équilibre élastique linéaire minimise parmi les champs CA $\underline{\xi}'$ la fonctionnelle énergie potentielle E_p

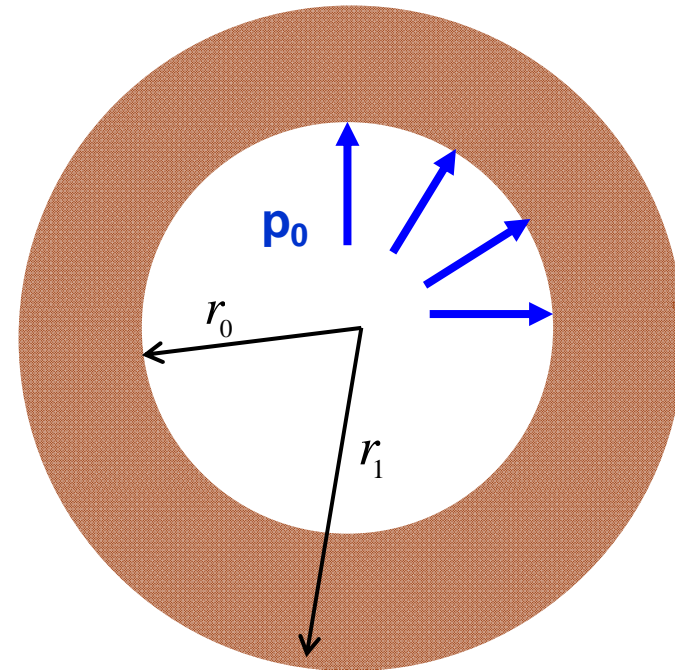
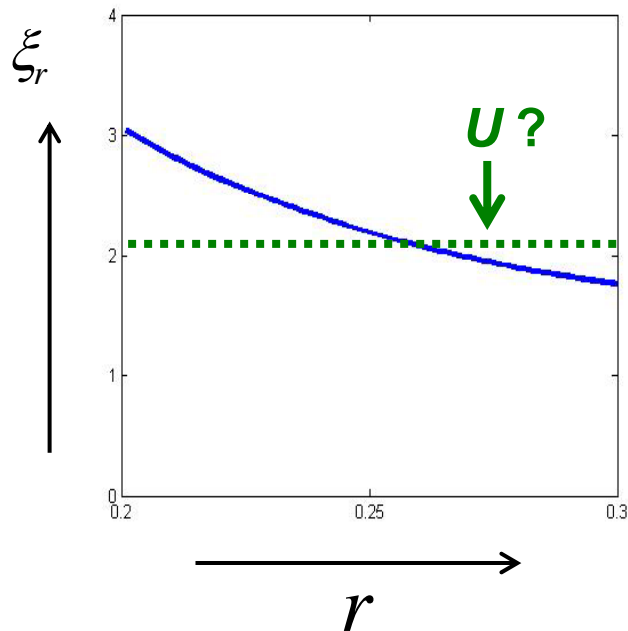
$$E_p(\underline{\xi}) \leq E_p(\underline{\xi}') \quad \forall \underline{\xi}' \text{ C.A}$$

Exemple d'application du théorème de minimum pour les déplacements

Sphère sous pression

- Solution (exacte) de référence :

$$\xi_r = ar + \frac{b}{r^2}$$



Recherche d'une **solution approchée** avec un champ CA **le plus simple possible** :

$$\underline{\xi}' = U \underline{e}_r$$

Sphère sous pression – solution approchée

- Calcul de **l'énergie potentielle** (dans l'espace des $\underline{\xi}'$ CA choisis) .

$$\underline{\xi}' = U \underline{e}_r \Rightarrow \underline{\varepsilon}' = \frac{U}{r} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \Rightarrow \underline{\varepsilon}'^2 = \frac{U^2}{r^2} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} W(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} (\text{Tr } \underline{\varepsilon}')^2 + \mu \text{Tr}(\underline{\varepsilon}'^2) \right) d\Omega = 8\pi (r_1 - r_0) (\lambda + \mu) U^2 \\ \Phi(\underline{\xi}') = \int_{S_{T_i}} T_i^d \xi_i' dS = \int_{S_0} p_0 U da = 4\pi r_0^2 U p_0 \end{array} \right.$$



$$E_p(\underline{\xi}') = 4\pi U \left[2U (\lambda + \mu) (r_1 - r_0) - p_0 r_0^2 \right]$$

Sphère sous pression. Solution approchée

- Minimisation de **l'énergie potentielle**



Recherche de la "meilleure" constante **U** au sens énergétique du terme.



$$\frac{\partial E_p}{\partial U} = 0 \Rightarrow U = \frac{p_0 r_0^2}{4(\lambda + \mu)(r_1 - r_0)}$$



Le champ CA recherché est ici :

$$\underline{\xi} = \frac{p_0 r_0^2}{4(\lambda + \mu)(r_1 - r_0)} \underline{e}_r$$

$$\rightarrow E_p(\underline{\xi}) = -\frac{1}{2} 4 \pi r_0^2 p_0 \xi_r(r_0) \leq E_p(\underline{\xi}') = -\frac{1}{2} \pi p_0^2 \frac{r_0^4}{(\lambda + \mu)(r_1 - r_0)}$$

$$\xi_r(r_0) = \frac{p_0 r_0}{(r_1^3 - r_0^3)} \left(\frac{r_0^3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{r_1^3}{4\mu} \right) \leq \frac{p_0 r_0^2}{4(\lambda + \mu)(r_1 - r_0)}$$

Théorème du minimum de l'énergie potentielle complémentaire

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}' d\Omega \quad : \text{Energie élastique en contrainte de } \underline{\underline{\sigma}}' \text{ SA}$$

$$\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \sigma'_{ij} n_j \xi_i^d dS \quad : \text{Travail des 'réactions' associées à } \underline{\underline{\sigma}}' \text{ dans les déplacements donnés}$$

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}') = W^*(\underline{\underline{\sigma}}') - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}')$$

Th: Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ solution du problème d'équilibre élastique linéaire minimise parmi les champs SA $\underline{\underline{\sigma}}'$ la fonctionnelle énergie potentielle complémentaire E_c

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}) \leq E_c(\underline{\underline{\sigma}}') \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}' \text{ S.A}$$

Formule de Clapeyron et Théorème d'encadrement

Pour les champs solution $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\xi}}$

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) : \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) d\Omega = W(\underline{\underline{\xi}})$$

Formule de Clapeyron :

$$W(\underline{\underline{\xi}}) = W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} [\Phi(\underline{\underline{\xi}}) + \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}})] = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\xi}} d\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^d \xi_i dS + \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \sigma_{ij} n_j \xi_i^d dS \right]$$

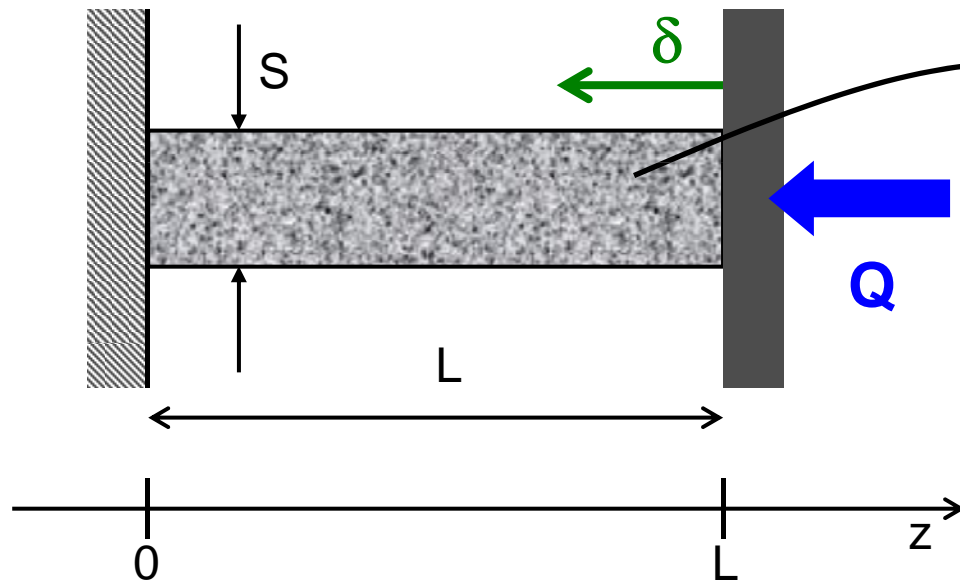
$$= \frac{1}{2} \text{Travail de toutes les forces ext.}$$

**Théorème
d'encadrement:**

$$-E_c(\underline{\underline{\sigma}}') \leq -E_c(\underline{\underline{\sigma}}) = E_p(\underline{\underline{\xi}}) \leq E_p(\underline{\underline{\xi}}')$$

$$\forall \underline{\underline{\xi}}' \text{ C.A.}, \forall \underline{\underline{\sigma}}' \text{ S.A.}$$

Application : module d'Young apparent d'un cylindre hétérogène



$$\lambda(\underline{x}), \mu(\underline{x}) \Leftrightarrow E(\underline{x}), \nu(\underline{x})$$

$$\begin{aligned} \text{sur } (S_L): \xi_z^d(L) &= -\delta ; T_x^d(L) = T_y^d(L) = 0 \\ \text{sur } (S_0): \xi_z^d(0) &= 0 ; T_x^d(0) = T_y^d(0) = 0 \\ \text{sur } (S_{lat}): T_i^d &= 0 \end{aligned}$$

Hyp : - transformation isotherme ; état initial naturel
 - pas de frottement

But : déterminer relation entre Q et δ , soit :
 (Q est ici l'inconnue)

$$E_a = \frac{QL}{S\delta}$$

Module d'Young apparent d'un cylindre inhomogène (2)

- Application de la **formule de Clapeyron**



$$W(\underline{\xi}) = W^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} Q \delta$$

- Calcul des **travaux des efforts extérieurs**

$$\Phi(\underline{\xi}) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\xi} \, d\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^d \xi_i \, da = 0$$

$$\Phi^*(\underline{\sigma}) = \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^d \sigma_{ij} n_j \, da = Q \delta$$

$$E_p(\underline{\xi}) = -E_c(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} Q \delta$$

Module d'Young apparent d'un cylindre inhomogène (3) : Application du théorème de minimum en contrainte

1. Par analogie avec le cas du cylindre homogène, on peut choisir le champ SA :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \sigma' \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

→
$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \frac{\sigma'^2}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{E(\underline{x})} d\Omega = \frac{\sigma'^2 \Omega}{2} \overline{\left(\frac{1}{E}\right)}$$
 et
$$\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^d \sigma'_{ij} n_j da = -\delta \sigma' S$$

2. On cherche l'extremum de l'énergie potentielle en contrainte, soit :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \sigma'} = 0 \Rightarrow \sigma' = -\frac{\delta}{L \overline{\left(\frac{1}{E}\right)}} \Rightarrow E_c(\underline{\underline{\sigma}}') = -\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{L \overline{\left(\frac{1}{E}\right)}}$$

3. On obtient une première inégalité

→
$$-E_c(\underline{\underline{\sigma}}') \leq -E_c(\underline{\underline{\sigma}}) \Rightarrow \frac{\delta S}{L \overline{\left(\frac{1}{E}\right)}} \leq Q \Leftrightarrow E_a \geq \frac{1}{\overline{\left(\frac{1}{E}\right)}}$$

Module d'Young apparent d'un cylindre inhomogène (4) : Application du théorème de minimum en déplacement

- Toujours en s'inspirant du cas homogène, on choisit un champ CA :

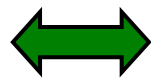
$$\underline{\xi}' = a x \underline{e}_x + b y \underline{e}_y - \frac{\delta}{L} z \underline{e}_z$$

- On calcule **a** et **b** qui minimisent E_p

- Tous calculs faits:
$$E_p(\underline{\xi}') = \frac{\bar{\mu} SL}{2} \frac{\delta^2}{L^2} \frac{3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}$$

- Th du minimum de E_p :

$$E_p(\underline{\xi}) \leq E_p(\underline{\xi}') \Rightarrow \frac{1}{2} Q \delta \leq \frac{\bar{\mu} SL}{2} \frac{\delta^2}{L^2} \frac{3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}$$



$$E_a = \frac{QL}{S\delta} \leq \bar{\mu} \frac{3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}$$

Module d'Young apparent d'un cylindre inhomogène (5) : Encadrement

- La combinaison des deux inégalités fournit l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{E}\right)} \leq E_a \leq \bar{\mu} \frac{3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \quad (1)$$

- Des informations plus précises sur l'inhomogénéités permettraient de raffiner cet encadrement
- Dans le cas homogène, l'Eq. (1) fournit $E_a = E$.

FIN