

Cours de Mécanique des fluides

J.ROUSSEL

C.P.I.2 - Chem.I.St2 : 2005-2006

Table des matières

1 Cinématique des fluides	5
1.1 L'état fluide	5
1.2 Description d'un fluide	7
1.3 Conservation de la masse	11
2 Dynamique des fluides Newtoniens	15
2.1 Bilan des forces	15
2.2 L'équation de Navier-Stokes.	21
2.3 Conditions aux limites	23
3 Fluides en équilibre	25
3.1 Fluide au repos dans un champ de pesanteur	25
3.2 Cas général	29
4 Théorèmes de Bernoulli - Applications	33
4.1 Écoulement parfait stationnaire incompressible	33
4.2 Écoulements irrotationnels	37
4.3 Théorème de Bernoulli généralisé	39
5 Écoulements visqueux	43
5.1 Écoulement de poiseuille.	43
5.2 Force de traînée sur un obstacle	46

6	Phénomènes de tension de surface	49
6.1	Notion de tension superficielle	49
6.2	Théorème de Laplace et loi de Jurin	54
A	Formulaire mathématique	57
A.1	Opérateurs	57
B	Interprétation énergétique du théorème de Bernoulli.	63
C	Démonstrations du théorème de Laplace et de la loi de Jurin.	65
C.1	Théorème de Laplace	65
C.2	Loi de Jurin	66
D	Diagramme de Moody	69

Chapitre 1

Cinématique des fluides

Dans ce chapitre, nous allons étudier le fluide et son écoulement indépendamment des forces responsables de cet écoulement.

1.1 L'état fluide

1.1.1 Propriétés d'un fluide

L'état fluide caractérise un état de la matière. Les liquides, les gaz ainsi que les plasma (gaz de particules chargées) ont les propriétés d'un fluide. Pour décrire l'état fluide adoptons deux points de vue :

point de vue macroscopique : Un fluide est un système déformable sans forme propre.

- o **L'état liquide** : les liquides sont des fluides très peu compressibles et ont donc un *volume propre*. En première approximation on pourra considérer la masse volumique invariable :

$$\text{Approximation : } \mu \approx \text{constante}$$

ce qui revient à considérer que la compressibilité ainsi que le coefficient de dilatation est nulle :

$$\chi_T = - \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T = \left. \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \right|_T \approx 0 \text{ Pa}^{-1}$$

$$\alpha = \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P = - \left. \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_P \approx 0 \text{ K}^{-1}$$

Bien sûr, ces grandeurs ne sont pas nulles mais faibles. On retiendra que rigoureusement $\alpha = \alpha(T, P)$ et $\chi_T = \chi_T(P, T)$ mais que pour de faibles variations de pression (quelques bar) et de faibles variations de température (100° C) la masse volumique est quasi constante (sauf si l'on passe par une transition de phase).

Exemple : pour l'eau la compressibilité vaut $\chi_T \approx 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ à 20°C . Cela signifie qu'il faut augmenter la pression de 227 bars pour voir la masse volumique augmenter de 1%. Les liquides ont un coefficient de dilatation très faible ($\alpha \ll \frac{1}{T}$). Quand on en tient compte on considère souvent que $\alpha \approx$ constante. Par exemple le mercure $\alpha \approx 16 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ à 6000 atm et à 283 K.

- **Les gaz** : à l'inverse des liquides, les gaz sont très compressibles ($\mu = \mu(P, T)$). Pour un gaz parfait, on a :

$$\text{Approximation du gaz parfait : } \chi_T = \frac{1}{P}$$

ce qui signifie qu'il suffit d'augmenter la pression de 1% (c'est-à-dire de 10 mbar, si on est à la pression atmosphérique) pour augmenter la masse volumique de 1%.

Point de vue microscopique : Fondamentalement, un fluide se caractérise par l'absence d'ordre à longue portée (contrairement aux cristaux) et par l'existence d'un chaos moléculaire (contrairement aux solides). Certains systèmes peuvent présenter un ordre à longue portée suivant une seule direction ; c'est le cas des cristaux liquides par exemple.

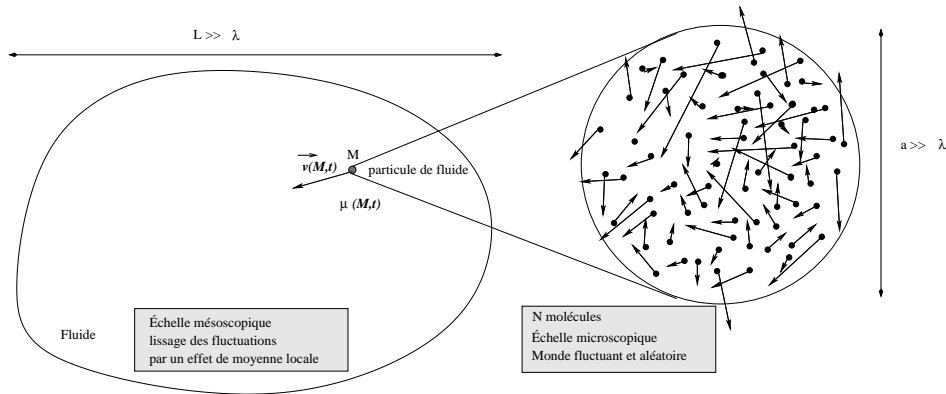
- **Les gaz** : dans un gaz les particules interagissent peu, l'énergie est avant tout cinétique. Les distances inter-atomiques sont grandes ce qui explique qu'on puisse comprimer les gaz.
- **Les liquides** : dans un liquide les interactions (l'interaction de Van der Waals, la liaison hydrogène, l'interaction électrostatique dans une solution électrolytique etc ...) jouent un rôle clé. L'interaction est telle que les molécules sont quasi en contact ce qui explique le caractère quasi-incompressible des liquides.

1.1.2 Le modèle continu

Avant toute chose, on doit se donner une *échelle de description*. L'échelle macroscopique n'est pas adaptée notamment parce que le fluide n'est pas solide (système que l'on peut décrire dans son ensemble à l'aide du vecteur rotation et du vecteur vitesse du centre d'inertie). À l'échelle microscopique les grandeurs varient de façon discontinue et imprévisible (cf. Physique statistique). On décide alors de décrire le fluide à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique : on parle d'*échelle mésoscopique*.

On considère, autour d'un point M , un volume $\delta\tau$, petit par rapport à l'échelle macroscopique et grand par rapport à l'échelle microscopique. Typiquement un volume de $1 \mu\text{m}^3$ convient. Ce volume contient un grand nombre de particules ce qui permet de définir des grandeurs moyennes qui elles vont évoluer de façon continue. On définira alors des grandeurs moyennes locales :

- La masse volumique locale en M : $\mu(M, t) = \frac{\delta m}{\delta\tau}$, où δm est la masse de l'ensemble des particules dans $\delta\tau$, à l'instant t .
- la vitesse moyenne locale en M : $\overrightarrow{v}(M) = \langle \overrightarrow{v}_i \rangle$ où \overrightarrow{v}_i est la vitesse d'une particule microscopique dans $\delta\tau$ à l'instant t .

FIG. 1.1 – *Modèle continu du fluide.*

On donne au volume $\delta\tau$ le nom de **particule de fluide** à ne pas confondre avec les particules (molécules, ions,...).

Remarques :

1. quand on parle de la vitesse v en mécanique des fluides, on parle de la norme de la vitesse de la particule de fluide. Pour un fluide au repos, on a $v(M) = 0 \forall M \in \text{fluide}$ mais la moyenne de la norme de la vitesse des particules (atomes, molécules etc...) est différente de zéro !
2. Un milieu peut être considéré continu si le libre parcours moyen λ des molécules est petit devant la taille caractéristique L du système étudié. On définit le nombre de KNUDSEN

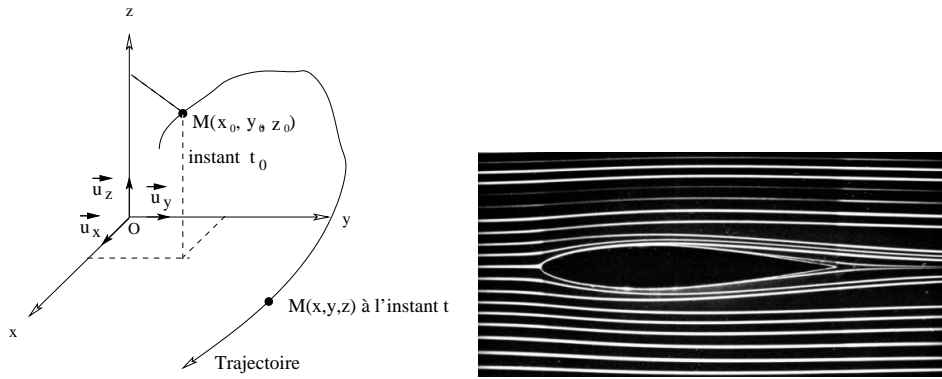
$$K_n = \frac{\lambda}{L} \ll 1$$

Lorsque K_n n'est pas petit devant 1, le modèle continu devient faux, il faut alors utiliser les concepts de physique statistique.

1.2 Description d'un fluide

1.2.1 Description de Lagrange

Considérons une particule de fluide \mathcal{P} , placée en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0 . Dans la description de Lagrange, on suit le mouvement d'une particule de fluide. Par exemple, la particule de fluide dont il est question précédemment, sera en $M(x, y, z)$ à l'instant t . On peut déterminer la trajectoire de la



(a) Visualisation de la trajectoires des particules autour d'un obstacle

FIG. 1.2 – Trajectoire d'une particule de fluide.

particule de fluide si l'on connaît les fonctions :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

La vitesse de la particule s'écrit :

$$\vec{v}(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Description de Lagrange => Trajectoire des particules de fluide

Observation expérimentale : On utilise des traceurs (colorants ou fumées) et l'on prends une photo avec un long temps pose (cf. figure 1.2).

1.2.2 Description d'Euler

L'approche d'Euler est à mettre en parallèle avec l'approche de Maxwell en électromagnétisme. De la même manière que l'on définit le champ électromagnétique en tout point de l'espace, à un instant t , ici, on va considérer le fluide dans son ensemble à l'instant t . On définit en chaque point du système les grandeurs : $\mu(x, y, z, t)$, $P(x, y, z, t)$; $\vec{v}(x, y, z, t)$ etc...Ainsi, à un instant t , on peut représenter

les champs scalaires (μ et P) à l'aide d'iso-surface (iso-bares et iso-densité), et les champs vectoriels (vitesse et accélération) à l'aide des lignes de champ.

Notion de ligne de courant : Une ligne de courant est une ligne de champ du vecteur vitesse c'est-à-dire une courbe tangente en tout point $M(x, y, z)$ à $\vec{v}(x, y, z, t)$ à l'instant t . L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps. L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Description d'Euler => Ligne de courant

Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe C fermée constituent un *tube de courant*.

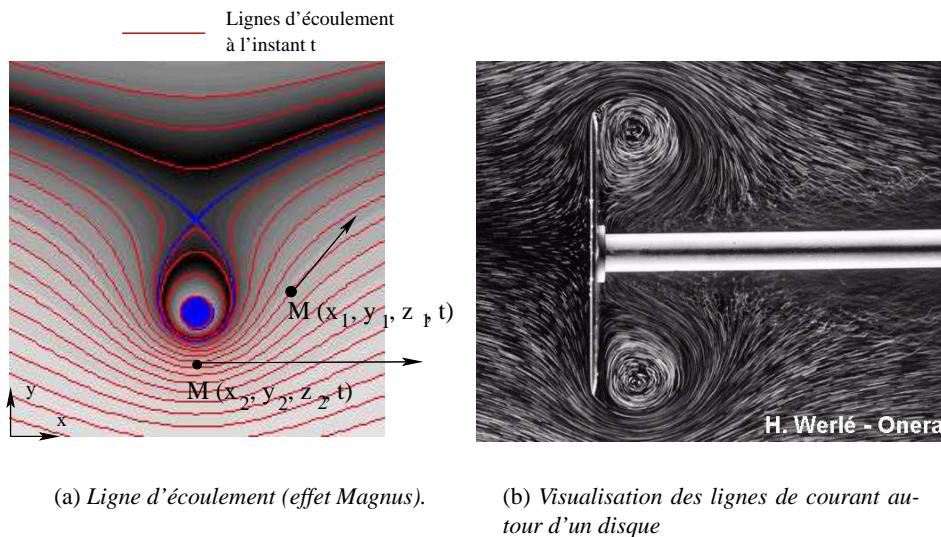


FIG. 1.3 – Notion de ligne de courant.

! Attention ! Un ligne de courant n'est pas forcément une trajectoire d'une particule de fluide.

Observation expérimentale : On utilise des particules réfléchissantes que l'on photographie avec un court temps de pose. On a accès ainsi à des segments brillants qui donnent le sens de la vitesse en différents points ce qui permet de reconstituer la carte du champ de vitesse.

1.2.3 Régimes d'écoulement

Régime stationnaire : la vitesse ne dépend pas explicitement du temps : $\frac{\partial \vec{v}(x, y, z, t)}{\partial t} = \vec{0}$. Attention cela ne signifie pas que la particule n'est pas accéléré ! Cela signifie simplement que les lignes de

courants n'évoluent pas au cours du temps.

En régime stationnaire, une ligne de courant est aussi une trajectoire et vice-versa !

Régime laminaire : Ouvrez lentement un robinet et remarquez, qu'à faible débit, l'écoulement semble régulier : le fluide s'organise en filets. On peut alors décrire l'écoulement comme une superposition de filets ou de couches glissant les uns sur les autres.

Régime turbulent : Lorsque l'on ouvre le robinet au maximum, la vitesse d'écoulement varie de façon erratique dans l'espace et le temps. Dans ce cas, les lignes de courant s'entremêlent de façon complexe et chaotique.

1.2.4 Accélération d'une particule de fluide

Suivant l'approche que l'on choisit, l'accélération ne s'exprime pas de la même façon.

Approche de Lagrange : Si l'on connaît la trajectoire de la particule grâce à la position de la particule de fluide P :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

On obtient l'accélération simplement en écrivant :

$$\vec{a}(P) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

Approche d'Euler : Ici, on ne connaît pas la trajectoire de la particule mais simplement le champ de vitesse eulérien $\vec{v}(x, y, z, t)$. On cherche à exprimer l'accélération d'une particule en fonction de ce champ des vitesses.

À l'instant $t + \delta t$, la particule possède une vitesse $\vec{v}(x + v_x \delta t, y + v_y \delta t, z + v_z \delta t, t + \delta t)$. L'accélération s'écrit

$$\vec{a} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(x + v_x \delta t, y + v_y \delta t, z + v_z \delta t, t + \delta t) - \vec{v}(x, y, z, t)}{\delta t} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\text{en suivant la particule}} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Où, $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ représente ce que l'on appelle la dérivée particulaire.

Ainsi, l'accélération suivant x s'écrit

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x$$

de façon compacte on a

$$\text{Accélération : } \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

Le premier terme est lié au caractère non permanent de l'écoulement alors que le deuxième terme est lié à la variation spatiale de la vitesse ; on l'appelle le *terme convectif*.

De manière générale, quand on suit l'évolution d'une grandeur $G(t)$ associée à une particule on accède à sa variation temporelle par :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})G$$

Remarque : On utilisera par la suite l'approche d'Euler.

1.3 Conservation de la masse

1.3.1 Vecteur densité de matière

On cherche à exprimer la masse qui traverse une surface (S) lors d'un écoulement.

Pour cela, imaginons un cylindre infiniment petit de base dS et de génératrice $\vec{v} dt$. Calculons la masse dm traversant cette élément de surface pendant la durée dt . Les particules situées dans le cylindre représenté sur la figure 1.4, traversent effectivement la section du cylindre pendant la durée dt . On a donc

$$dm = \mu dt dS \vec{v} \cdot \vec{n}$$

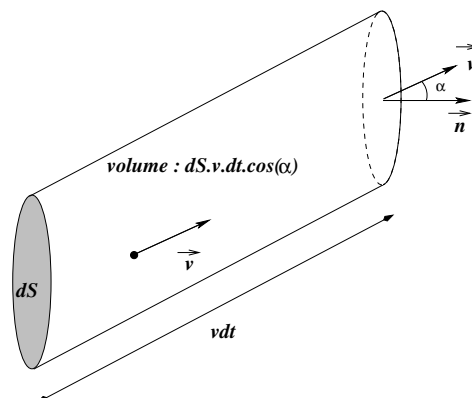


FIG. 1.4 – Calcul du débit.

Débit massique : Le débit massique Q_m mesure la masse qui traverse la surface S par unité de temps (unité : $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) :

$$Q_m = \iint_{(S)} \frac{dm}{dt} = \iint_{(S)} \mu \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Pour une surface fermée :

$$Q_m^{\text{sortie}} = \oint_{(S)} \mu \vec{v} \cdot dS \vec{n}$$

où Q_m^{sortie} est le débit massique sortant si \vec{n} est dirigé vers l'extérieur (convention mathématique).

Débit volumique : le débit volumique Q_V mesure le volume de fluide qui traverse la surface S par unité de temps (unité : $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$) :

$$Q_V = \iint_{(S)} \frac{1}{\mu} \frac{dm}{dt} = \iint_{(S)} \vec{v} dS \vec{n}$$

Densité de courant : on appelle vecteur *densité de courant de matière* le vecteur :

$$\vec{j} = \mu \vec{v}$$

Le débit massique est donc le flux du vecteur densité de courant de matière.

Remarques :

1. En électricité le courant électrique (débit de charge) est le flux du vecteur densité de courant électrique $\vec{j}_q = \rho_l \vec{v}$ où ρ_l est la densité volumique de charge.
2. Pour tout phénomène de transport on peut définir un vecteur densité de courant qui obéit à une relation de conservation analogue à celle que l'on va voir dans le paragraphe suivant.

1.3.2 Équation de continuité.

La masse se conservant, cela se traduit par une équation de conservation de la masse, dite aussi « *équation de continuité* » .

Prenons un système ouvert de volume constant V , entouré par une surface fictive (S) .

Soit $M(t)$ la masse contenue dans (S) à l'instant t . Cette masse varie si le débit massique entrant est différent du débit massique sortant ce qui modifie la masse volumique du système (S) :

$$M(t) = \iiint_{(V)} \mu(x, y, z, t) dx dy dz$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = \iiint_{(V)} \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dy dz = - \iint_{(S)} \mu \vec{v} dS \vec{n}$$

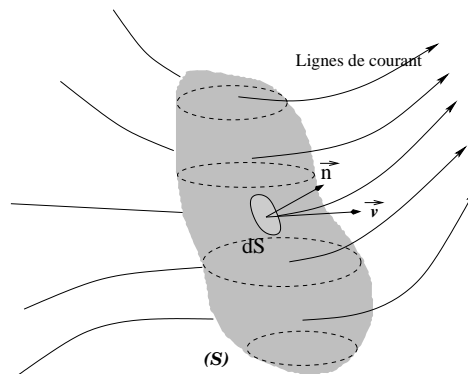


FIG. 1.5 – Conservation de la masse.

D'après le théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_{(V)} (\operatorname{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t}) dx dy dz = 0 \quad \forall V$$

d'où l'équation de continuité :

$$\boxed{\text{Équation de continuité : } \operatorname{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0}$$

1.3.3 Cas des fluides incompressibles

Rappelons que pour un fluide incompressible, la masse volumique est constante. Cela concerne donc les liquides ainsi que les écoulements gazeux dont la vitesse est très inférieure à la vitesse du son dans ce gaz.

Si la masse volumique est constante, l'équation de continuité se simplifie :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{v} \cdot dS \vec{n} = 0$$

la vitesse est à flux conservatif.

Conséquences :

- Dans le cas d'un tube de courant on a le débit volumique $Q_v = \iint \vec{v} \cdot dS \vec{n}$ qui se conserve :

$$Q_{v \text{ entrant}} = Q_{v \text{ sortant}}$$

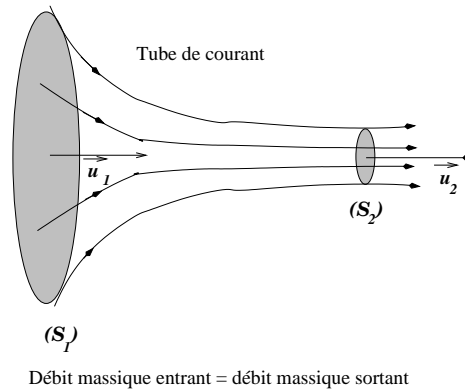


FIG. 1.6 – Conservation du débit dans un tube de courant.

- Si l'on définit la **vitesse moyenne dans le section S** par :

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \iint \vec{v} \cdot \vec{u} \, dS$$

On obtient

$$\bar{v}_1 S_1 = \bar{v}_2 S_2$$

Ainsi, dans un tube de courant, le resserrement des lignes de courant provoque une augmentation de la vitesse moyenne.

Chapitre 2

Dynamique des fluides Newtoniens

L'objectif de la dynamique est de relier l'écoulement aux actions qui lui donnent naissance. L'approche est de type mécanique : On fait un bilan des forces s'exerçant sur une particule de fluide puis on applique les lois de la mécanique classique.

2.1 Bilan des forces

On distingue deux types de forces :

- Il y a les forces de contact entre particule de fluide que l'on appellera forces internes. Il s'agit de forces de surface.
- Le fluide est également soumis à des forces dont l'origine est extérieure au fluide (existence d'un champ de pesanteur, champ électrique etc...). On parlera de forces extérieures.

2.1.1 Forces de pression

Pression : La force qui s'exerce sur un élément de surface dS infiniment petit, peut se décomposer en une composant normale $d\vec{F}_n$ et tangentielle $d\vec{F}_t$. Le rapport $\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}}{dS}$ désigne la **contrainte**.
On admettra que :

1. Pour un fluide au repos, la contrainte est normale (sinon, ce n'est pas un fluide).
2. Cette contrainte s'appelle la pression et se note $P(M)$.

$$d\vec{F}_n = -P(M).dS.\vec{n}$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire orienté vers l'extérieur (cf. schéma).

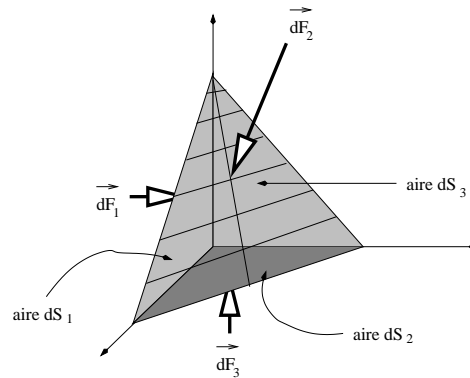


FIG. 2.1 – Forces de pression s'exerçant sur un volume infinitésimal de fluide. Sur les trois faces, la pression prend la même valeur.

3. La pression est un scalaire qui ne dépend pas de l'orientation de la surface ! Par exemple, si l'on mesure la pression sur les 4 faces du tétraèdre infinitésimal, on trouve la même valeur.
4. Unités : une analyse dimensionnelle montre que la pression est la dimension suivante : $[P] = [ML^{-1}T^{-2}]$. Dans le Système International d'unités, la pression s'exprime en Pascal (pa).

$$1\text{Pa} = 1\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$$

On retiendra les autres unités souvent utilisées :

Unité	Équivalence en pascal
Bar	1 bar = 10^5 Pa
atmosphère (atm)	1 atm = $1,01310^5$ Pa
torr (mm Hg)	1 torr = 1 mm Hg = 133,3 Pa

TAB. 2.1 – Unités de pression.

Origine de la pression : La pression est le résultat des chocs moléculaires sur la surface et de l'interaction à courte portée (interaction de Van Der Waals et liaisons H) des molécules voisines de la surface.

- Cas des gaz : Si la pression est faible, on pourra considérer le gaz parfait. On aura donc ,

$$\text{Approximation des Gaz Parfaits : } P \approx \frac{nRT}{V}$$

Il s'agit de la pression cinétique (cf. Physique statistique).

- Cas des liquides : Dans un liquide $P = P_{cin} - P_m$ où P_m représente la pression moléculaire due aux interactions inter-particules. Pour l'eau à température ambiante on a $P_{cin} \approx P_m \approx$

1300 atm !

2.1.2 Force volumique associée aux forces de pression

Calculons la résultante des forces de pression qui s'exerce sur un petit cube de fluide de volume infinitésimal $d\tau = dx dy dz$. Pour le calcul on supposera dans un premier temps que la pression ne dépend que de la variable y . Dans ce cas, la résultante des forces de pression est suivant Oy. Calculons

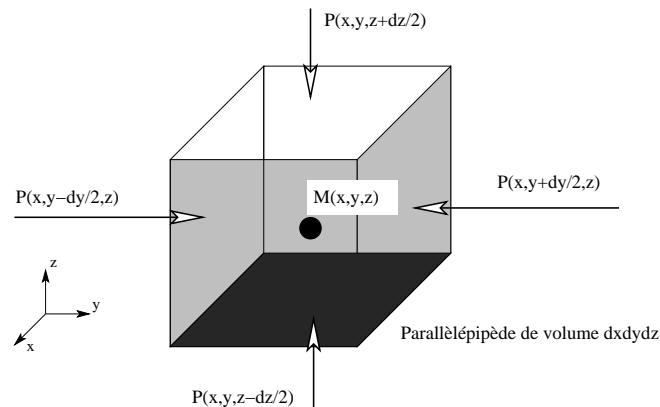


FIG. 2.2 – Bilan des forces de pression sur une particule de fluide dans le cas où la pression ne dépend que de la coordonnée y .

cette composante :

$$F_y = dx dz \left[P\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) - P\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) \right]$$

$$F_y = dx dz \left[P(x, y, z) - \frac{dy}{2} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) - \left(P(x, y, z) + \frac{dy}{2} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial y} d\tau$$

Si maintenant, nous supposons que la pression varie avec les trois coordonnées de l'espace, le bilan des forces fait apparaître trois composantes :

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z = - \vec{\nabla} P d\tau$$

Les forces de pression superficielles sont donc équivalentes à une force volumique de pression

$$\text{Force volumique de pression : } \vec{f}_p = - \vec{\nabla} P$$

Remarque : la résultante des forces volumiques s'exerçant sur un volume V s'écrit formellement

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{f}_p d\tau.$$

2.1.3 Notion de viscosité

Nous avons vu que la contrainte qui s'exerce sur une surface infinitésimale dans un fluide est normale à la surface lorsque le fluide est au repos. Lorsqu'il y a écoulement, la contrainte possède une composante tangentielle liée à la **viscosité**.

Expérience de Couette : Considérons deux cylindres coaxiaux de rayons peu différents, l'espace annulaire étant rempli du fluide à étudier. Si le cylindre extérieur est entraîné à une vitesse angulaire ω , on constate que le cylindre intérieur se met à tourner à la même vitesse. Pour que le cylindre extérieur reste fixe il faut lui appliquer un couple de rappel avec un fil de torsion. Le fil tourne alors d'un angle α proportionnel à la vitesse angulaire.

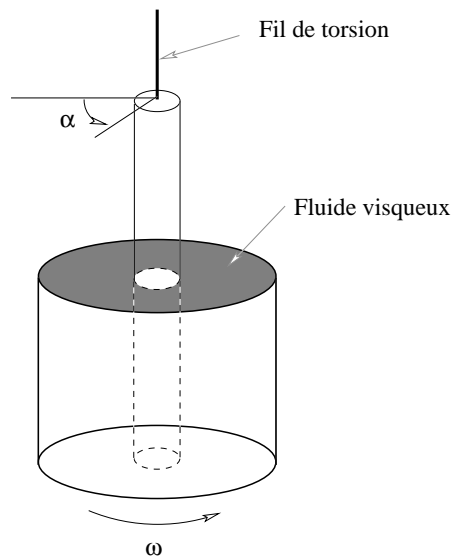


FIG. 2.3 – Expérience de Couette.

Cette expérience traduit l'existence de forces tangentielles. L'expérience permet de mesurer la contrainte tangentielle (force par unité de surface) que le fluide exerce sur le cylindre intérieur. On trouve

$$\tau \propto \frac{v}{e}$$

où v est la vitesse linéaire du cylindre extérieur et e l'épaisseur de l'espace inter-cylindrique.

Viscosité : La viscosité est liée aux contraintes de frottements qui apparaissent dès qu'il y a écoulement. Pour un fluide dit newtonien, de viscosité η , la contrainte tangentielle qu'exerce un fluide

sur un élément de surface dS s'écrit :

$$\text{Définition de la viscosité : } \tau_{yx} = \frac{dF_t}{dS} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

où τ_{yx} est la contrainte s'exerçant suivant la direction x le long d'une surface normale à la direction y . Le gradient latéral de vitesse s'appelle aussi *vitesse de cisaillement* (cf. figure 2.4).

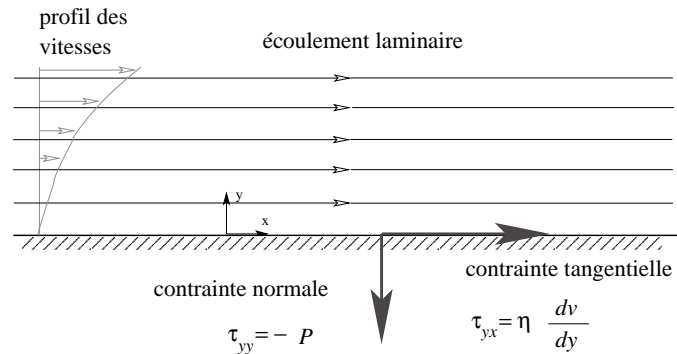


FIG. 2.4 – Notion de viscosité. Représentation des contraintes que le fluide exerce sur la surface $OxOz$.

La constante de proportionnalité η désigne la *viscosité* du fluide.

Unité : la viscosité se mesure, dans le Système International d'Unités, en poiseuille en hommage à Jean-Louis Marie Poiseuille¹ ou en Pascal.seconde (Pa.s.).

Fluide (20 °C, 1 atm)	Viscosité (Pa.s.)
Eau (liq)	$1,00610^{-3}$
Huile moteur (liq)	0,3
Glycérine pure (liq)	0,8
Mercure (liq)	$1,56.10^{-3}$
vapeur d'eau (gaz)	$9,7.10^{-6}$
Air sec (gaz)	$18,2.10^{-6}$

TAB. 2.2 – Quelques valeurs de viscosités.

évolution avec la pression et la température : En général, la viscosité varie peu avec la pression. Pour la température il faut distinguer les gaz et les liquides.

- $\eta \propto e^{b/T}$ pour les liquides. La viscosité diminue quand la température augmente.
- $\eta \propto \sqrt{T}$ pour les gaz. La viscosité augmente quand la température augmente.

¹Jean-Louis Marie Poiseuille est né le 22 avril 1797. Il est élève de l'école Polytechnique avant d'étudier la médecine. Les recherches de Poiseuille concernent principalement l'application des lois physiques à la physiologie. Les plus connus portent sur l'hémodynamique, c'est-à-dire la circulation sanguine.

Dans la lignée de ces travaux, Poiseuille dégage une loi sur l'écoulement des fluides visqueux dans des tubes capillaires. Admis en 1842 par l'Académie de médecine, il s'éteint en 1869 à Paris.

Remarque : Il existe des fluides non newtoniens pour lesquels la viscosité dépend de la vitesse de cisaillement.

2.1.4 Force volumique associée à la contrainte visqueuse

Nous ne démontrerons pas la formule générale qui donne le bilan des forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide. L'expression est en général assez compliquée. Elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles. Nous prendrons un exemple pour faire le calcul et généraliserons le résultat.

On traite l'exemple d'un écoulement unidimensionnel incompressible $\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$. On remarque ici que $\text{div}\vec{v} = 0$ ce qui implique que le fluide est incompressible.

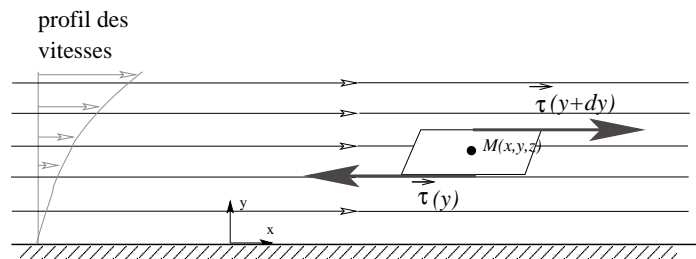


FIG. 2.5 – Bilan de forces de viscosité sur un élément de fluide.

Le bilan de force que subit la particule de la part du fluide s'écrit :

$$d\vec{F} = \eta \left[\frac{\partial v}{\partial y}(y + dy) - \frac{\partial v}{\partial y}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau \vec{u}_x$$

cette formule se généralise :

$$\text{Force volumique de viscosité : } d\vec{F} = \vec{f}_\eta d\tau = \eta \vec{\Delta} \vec{v} d\tau$$

où $\vec{\Delta}$ est l'opérateur laplacien vectoriel.

Rappel : Le Laplacien vectoriel s'exprime comme suit :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

Remarque : Si le fluide n'est pas incompressible, l'expression de la force volumique de viscosité est plus complexe.

2.1.5 Forces extérieures

Considérons une particule de fluide de volume $d\tau$. Cette particule subit de la part du fluide qui l'entoure les forces superficielles que sont les forces de pression et de viscosité. En plus de ces forces, d'autres forces d'origine extérieure au fluide agissent sur chaque particule de fluide. Ces forces sont proportionnelles au volume de la particule de fluide et s'écrivent :

$$d\vec{F} = \vec{f}_{\text{ext}} d\tau$$

Exemples : Donnons quelques exemples de forces volumiques extérieures.

- pour un fluide plongé dans un champ de pesanteur, on a $\vec{f}_{\text{ext}} = \mu \vec{g}$.
- pour un plasma baignant dans un champ électromagnétique on a $\vec{f}_{\text{ext}} = \rho_l (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.
- les forces d'inertie (si le référentiel d'étude n'est pas Galiléen) : $\vec{f}_{\text{ext}} = -\mu(\vec{a}_e + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v})$

2.2 L'équation de Navier-Stokes.

2.2.1 L'équation de Navier-Stokes.

Considérons une particule de fluide de masse dm , et appliquons le **Principe Fondamentale de la Dynamique** :

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P d\tau + \vec{f}_{\text{ext}} d\tau + \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

sachant que $dm = \mu d\tau$ on obtient la relation fondamentale des fluides newtoniens.

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

c'est l'équation de Navier-Stokes que l'on peut écrire sous la forme :

$$\text{Équation de Navier-Stokes : } \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

On remarque qu'elle est non linéaire à cause de la présence du terme convectif $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$; c'est ce qui rend les problèmes de mécanique des fluides mathématiquement redoutables...

2.2.2 Résoudre un problème de dynamique des fluides.

Distinguons deux cas :

- le fluide est incompressible ($\mu \approx \text{constante}$) :
le problème présente ici 4 inconnues scalaires : le champ de pression $P(x, y, z, t)$ et le champ des

vitesse (3 composantes) $\vec{v}(x, y, z, t)$. Il faut donc 4 équations ! l'équation de Navier-Stokes en donne 3. La quatrième est donnée par l'équation de continuité $\text{div } \vec{v} = 0$.

- le fluide est compressible (gaz en écoulement rapide) :

la masse volumique peut varier sous l'effet de la pression mais aussi sous l'effet de la chaleur. En général le fluide possède une équation d'état locale $\mu(P(x, y, z, t), T(x, y, z, t))$. le problème présente donc 6 inconnues scalaires : le champ de pression $P(x, y, z, t)$, le champ des vitesses (3 composantes) $\vec{v}(x, y, z, t)$ le champ $\mu(x, y, z, t)$ et la température $T(x, y, z, t)$. Il faut donc 6 équations ! l'équation de Navier-Stokes en donne 3, la quatrième est donnée par l'équation de continuité $\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, la cinquième par l'équation d'état du fluide $\mu(P, T)$ et la sixième par le premier principe de la thermodynamique. Dans ce cas une bonne modélisation des transferts thermiques est nécessaires ce qui rend le problème très ardu.

exemple : étudier une étoile ou la combustion d'une flamme nécessite ces 6 équations et surtout des gros ordinateurs...

- Conclusion : on est souvent amené à approcher des solutions en négligeant des termes de l'équation de Navier-Stokes pour se focaliser sur le phénomène essentiel.

2.2.3 Approximations

La complexité provient essentiellement de la présence, dans l'équation de Navier-Stokes, d'un *terme non linéaire* - le terme convectif - et d'un *terme du second ordre* - le terme de viscosité. Dans de nombreux cas, on peut négliger l'un des deux termes devant l'autre. On définit alors un facteur sans dimension, qui estime l'importance du terme convectif devant le terme de viscosité : Si l'on note d la distance caractéristique de l'écoulement, v la vitesse typique de l'écoulement, μ est la masse volumique moyenne du fluide et η la viscosité, le facteur

$$\left| \frac{\mu(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}{\eta \vec{v}} \right| \approx \frac{\mu v^2}{\eta v} = \frac{\mu v d}{\eta} = \mathcal{R}_e$$

est un nombre sans dimension et s'appelle le **nombre de Reynolds**. Ce nombre joue un rôle très important en mécanique des fluides car il permet de classer les écoulements. On distingue deux types d'écoulements :

- **L'écoulement laminaire** : il correspond à des nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e \lesssim 2000$. Si $\mathcal{R}_e \gg 1$ on pourra négliger le terme de viscosité (qui ne jouera un rôle clé que sur les bords) et l'on parlera d'**écoulement laminaire parfait**. L'équation de Navier-Stokes devient

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_{\text{ext}}$$

il s'agit de l'**équation d'Euler** qui est une équation différentielle du premier ordre. Si $\mathcal{R}_e \ll 1$ on pourra négliger le terme convectif devant le terme de viscosité. On parlera d'**écoulement laminaire**

visqueux. L'équation devient

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

- **L'écoulement turbulent** : il correspond à des nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e \gtrsim 2000$. Dans ce cas, le problème étant analytiquement insoluble, on utilise souvent des lois phénoménologiques associées à une analyse dimensionnelle (cf. chapitre 5).

2.3 Conditions aux limites

Les constantes d'intégration se déterminent par les conditions aux limites.

2.3.1 Écoulement parfait

- équation du premier ordre pour la pression et la vitesse. Il faut donc deux conditions aux limites.
- première condition : la composante de la vitesse perpendiculaire est continue lors de la traversée d'une interface.
- deuxième condition : la pression est continue à la traversée d'une interface fluide-fluide dans le cas où l'on néglige la capillarité ; sinon il faut appliquer la formule de Laplace (voir chapitre 6).

2.3.2 Écoulement visqueux

il s'ajoute deux conditions supplémentaires :

- pour un fluide visqueux une discontinuité de vitesse tangentielle entraîne une contrainte infini. La composante tangentielle doit donc être continue. Par exemple sur un obstacle fixe dans un fluide visqueux, la vitesse d'écoulement sur la paroi doit être nulle.
- la composante tangentielle de la contrainte est continue entre deux fluides (elle est quelconque pour une interface liquide solide)

Chapitre 3

Fluides en équilibre

3.1 Fluide au repos dans un champ de pesanteur

On dit que le fluide est au repos si il existe un référentiel dans lequel $\vec{v} = \vec{0}$ partout. On étudie alors ce fluide dans ce référentiel.

3.1.1 Mise en équation

On considère un fluide soumis à la seule action de pesanteur :

$$\vec{f}_{ext} = \mu \vec{g}$$

L'équation de Navier-Stokes devient :

$$-\vec{\nabla}P + \mu \vec{g} = \vec{0}$$

Ce qui donne, après projection suivant l'axe Oz descendant :

$$\text{Fluide au repos dans un champ de pesanteur : } \frac{dP}{dz} = \mu g$$

3.1.2 Cas des liquides

Un liquide peut, dans une première approximation, être considéré comme un fluide incompressible $\Rightarrow \mu \approx \text{Constante}$. Dans ce cas, l'équation précédente s'intègre sans difficulté :

$$\text{Liquide au repos dans un champ de pesanteur : } P(z) = P_0 + \mu g z$$

Le terme $\mu g z$ représente la pression due au poids de la colonne de liquide à la cote z .

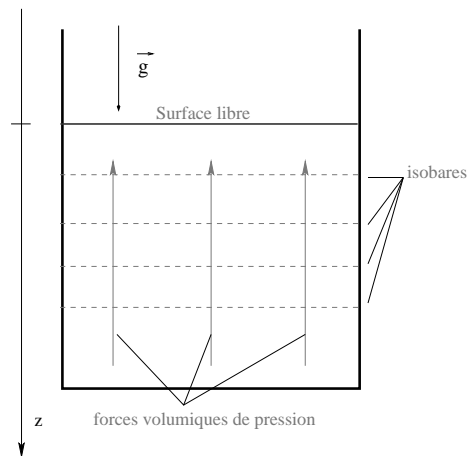


FIG. 3.1 – Équilibre d'un liquide dans un champ de pesanteur.

conséquences :

- La surface libre (isobare $P = P_{\text{ext}}$) est horizontale.
- Théorème de Pascal : Entre deux points M_1 et M_2 d'un même fluide au repos dans un champ de pesanteur, on a la relation $P_2 = P_1 + \mu g h$ où h est la dénivellation entre ces deux points. Si la pression augmente de Δp_1 en M_1 alors, la pression augmente de la même quantité en M_2 :

$$\Delta p_1 = \Delta p_2$$

Toute augmentation de pression se transmet intégralement dans un fluide (Théorème de pascal).

- Voir l'expérience du tonneau de Pascal.
- Application : principe de la presse hydraulique.

Applications :

- Mesure de pression : Par exemple le manomètre à liquide en U.
- le baromètre de Toricelli

3.1.3 Cas des gaz

Les gaz étant compressibles, il faut utiliser l'équation d'état ainsi que les principes de la thermodynamique pour résoudre le problème.

Prenons l'exemple simple d'un gaz parfait dont la température est fixée. Ce modèle peut servir à traiter l'atmosphère (modèle de l'atmosphère isotherme).

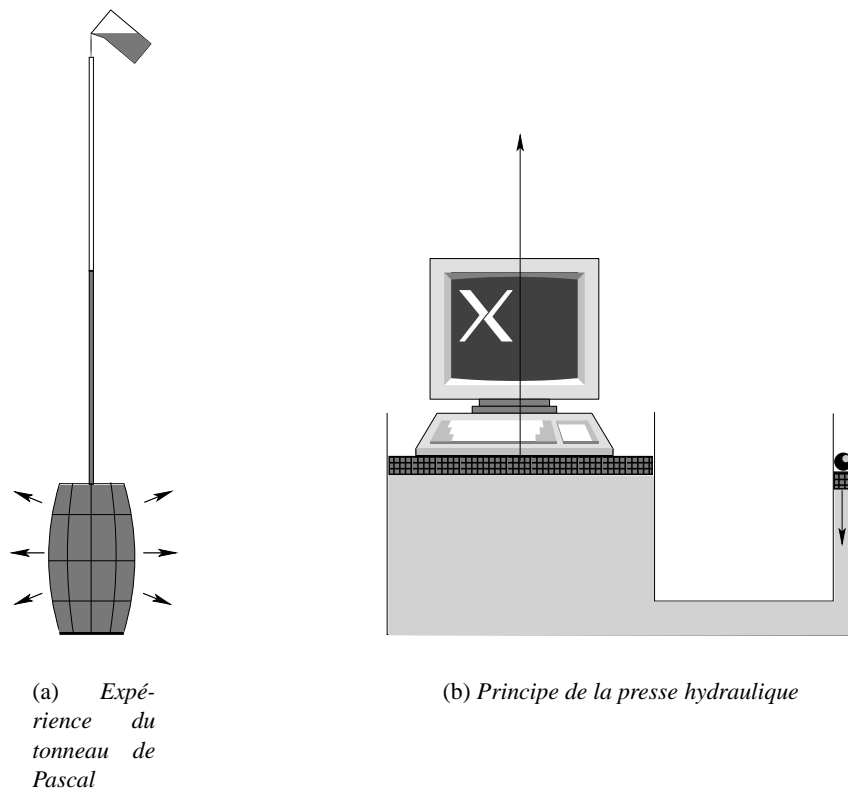


FIG. 3.2 – Conséquences du théorème de Pascal.

Le gaz est parfait donc :

$$\mu = \frac{MP}{RT}$$

La température est constante $T = T_0$ donc l'équation de la statique donne

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{MP}{RT_0}g$$

équation différentielle linéaire d'ordre 1. Sa résolution donne

$$P(z) = P_0 \exp\left[-\frac{z}{H}\right]$$

où $H = \frac{RT}{Mg}$. La pression diminue de façon exponentielle à partir du sol.

Ce modèle grossier de l'atmosphère aux basses altitudes donne une hauteur caractéristique $H \approx 8,4\text{km}$ si l'on prend de l'air de masse molaire $M = 29.10^{-3}\text{kg.mol}^{-1}$ et $T_0 = 288\text{K}$.

3.1.4 Poussée d'Archimède

Traitons le cas d'un solide cubique d'arête a immergé dans un liquide (cf figure) et calculons la résultante des forces de pression : Les forces de pression horizontales se compensent. Par contre les forces verticales ne se compensent pas puisque la pression augmente avec la profondeur.

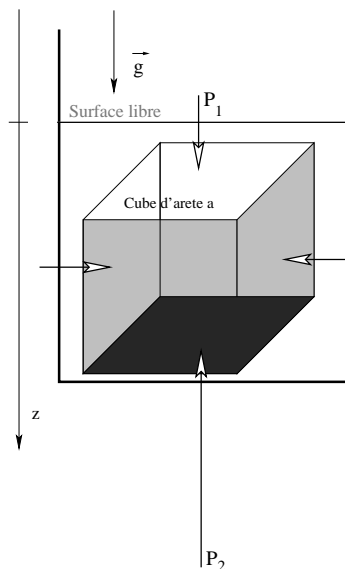


FIG. 3.3 – Poussée d'Archimède.

On obtient

$$\Pi = P_2S - P_1S = \mu gaS$$

On obtient une force ascendante égale au poids du volume de liquide déplacé.

THÉORÈME D'ARCHIMÈDE (250 AV.J.C.) : Tout corps immergé partiellement ou totalement dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède, dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé.

Le point d'application de cette force est le centre de poussée ; il est différent, en général, du centre de gravité.

Applications :

- flottaison des bateaux
- ascension des ballons sondes,
- convection de la chaleur etc...

3.2 Cas général

3.2.1 Équation fondamentale de l'hydrostatique

Nous allons maintenant considérer le cas général d'un fluide au repos dans un champ de forces extérieur de force volumique \vec{f}_{ext} . L'application de l'équation de Navier-Stokes donne, à l'équilibre l'équation de l'hydrostatique :

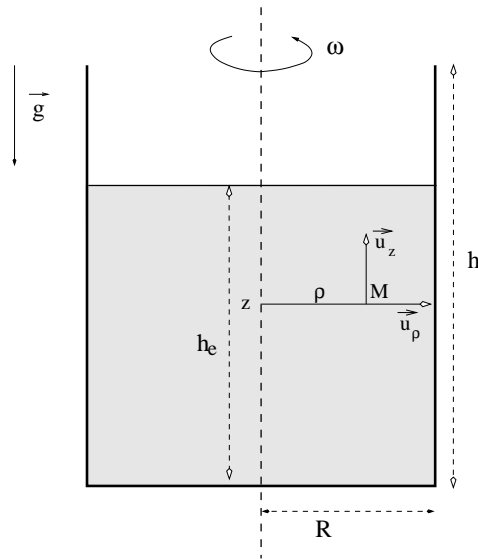
$$\text{Équation de l'hydrostatique : } \vec{f}_{ext} - \vec{\nabla} P = \vec{0}$$

3.2.2 Exemple : le liquide en rotation.

Un flacon cylindrique ouvert, contient un liquide de masse volumique μ . On fait tourner le flacon autour de son axe avec la vitesse angulaire ω . Ce liquide n'est pas en équilibre dans le référentiel du laboratoire. Cependant, après un régime transitoire qui dépend de la viscosité du liquide, le liquide tourne de façon solide à la même vitesse angulaire que le cylindre. Ainsi, dans le référentiel lié au cylindre, le liquide est au repos.

Bilan des forces : Le référentiel n'étant pas galiléen, il ne faut pas oublier les forces d'inertie :

- La force de Coriolis est nulle car la vitesse est nulle.
- La force d'entraînement (ou force centrifuge) vaut $\vec{f}_{ie} = \mu \rho \omega^2 \vec{u}_\rho$.
- La force volumique de pesanteur vaut $\vec{p} = \mu \vec{g}$

FIG. 3.4 – *Cylindre en rotation.*

Mise en équation : L'équation de la statique donne donc

$$\mu\rho\omega^2\vec{u}_\rho + \mu\vec{g} - \vec{\nabla}P = \vec{0}$$

ce qui donne :

$$P(\rho, z) = \frac{\mu\rho^2\omega^2}{2} - \mu gz + C$$

La surface libre est donc un paraboloïde de révolution.

Application : Des équipes de l'Université Laval, de l'University of British Columbia et de l'Institut d'astrophysique de Paris, ont mis au point un télescope Nommé Large Zénith Telescope (LZT) dont le miroir primaire fait 6 mètres de diamètre. Contrairement aux télescopes conventionnels dont le miroir est fait de verre, le LZT a un miroir fait de liquide réfléchissant, du mercure plus précisément qui adopte une surface parabolique puisque mis en rotation dans une cuve. Le miroir parabolique obtenu permet de faire l'image d'une étoile au foyer de la parabole avec précision.

La principale limitation du LZT, et des autres miroirs liquides, est qu'on ne peut le pointer ailleurs qu'au zénith, sinon le liquide s'échappe de la cuvette. "Un miroir liquide voit le ciel comme une personne, couchée sur le dos, qui regarde droit au-dessus d'elle sans pouvoir tourner la tête ni bouger les yeux", explique le chercheur. Au-dessus du miroir, une étroite bande de ciel défile à la vitesse de la rotation terrestre. Un astre donné met environ une minute à traverser le champ de vision du télescope.



FIG. 3.5 – Miroir liquide de l'université Laval (Canada).

3.2.3 Théorème d'Archimède

considérons un solide de volume V immergé dans un fluide quelconque.

La résultante des forces de pression s'appelle la poussée d'Archimède.

$$\vec{\Pi} = \iiint_V -\vec{\nabla}P d\tau$$

et comme à l'équilibre $\vec{f}_{ext} - \vec{\nabla}P = \vec{0}$ on obtient :

$$\vec{\Pi} = - \iiint_V \vec{f}_{ext} . d\tau$$

THÉORÈME D'ARCHIMÈDE GÉNÉRALISÉ : Tout corps immergé partiellement ou totalement dans un fluide à l'équilibre subit de la part de celui-ci une force, appelée poussée d'Archimède, qui est l'opposée de la force extérieure que subirait le volume de fluide déplacé.

Chapitre 4

Théorèmes de Bernoulli - Applications

4.1 Écoulement parfait stationnaire incompressible

Nous allons étudier les écoulements pour lesquels les forces de viscosités sont négligeables. On parle alors de *fluide non dissipatif ou parfait*.

4.1.1 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli énoncé en premier par Daniel BERNOULLI¹, est une équation intégrale de l'équation de NAVIER-STOKES qui exprime la conservation de l'énergie (cf. Annexe).

hypothèses : Le théorème de Bernoulli dans sa formulation classique ne s'applique qu'aux **écoulements stationnaires incompressibles et sans viscosité**. On a donc $\mu = \text{constante}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et

¹Daniel Bernoulli (Groningue 9 février 1700 - Bâle 17 mars 1782) est un médecin, physicien et mathématicien suisse. C'est le fils de Jean Bernoulli et le neveu de Jacques Bernoulli.

Il cultiva à la fois les sciences mathématiques et les sciences naturelles, enseigna les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique. Ami de Leonhard Euler, il travaille avec lui dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique (il partagea avec lui dix fois le prix annuel de l'Académie des sciences de Paris), qu'il s'en fit une sorte de revenu. Les différents problèmes qu'il tenta de résoudre (théorie de l'élasticité, mécanisme des marées) le conduisent à s'intéresser et développer des outils mathématiques tels que les équations différentielles ou les séries. Il collabore également avec Jean le Rond d'Alembert dans l'étude des cordes vibrantes.

Il passe quelques années à Saint-Pétersbourg comme professeur de mathématiques mais l'essentiel de sa carrière se déroule à l'université de Bâle où il enseigne successivement l'astronomie, la médecine et la philosophie. Il fut comme son père, membre des Académies de Paris, de Berlin, de Londres et de Saint-Pétersbourg.

Il publie en 1738 :

- son ouvrage Hydrodynamica (Strasbourg, 1738, in-4) dans lequel il expose le théorème fondamental de la mécanique des fluides qui porte son nom : le théorème de Bernoulli.
- et aussi une *Théorie sur la mesure du risque* 'z, dans laquelle le Paradoxe de Saint-Pétersbourg - né de discussions entre lui et son frère Nicolas - fut à la base de la théorie économique et financière de l'aversion au risque, la prime de risque et l'utilité.

$\eta = 0$. De plus, nous supposons que les forces volumiques extérieures dérivent d'une énergie potentielle :

$$\vec{f}_{ext} = -\vec{\nabla} e_p$$

Par exemple, pour un fluide dans un champ de pesanteur uniforme, $e_p = \mu g z$.

Mise en équation : L'équation de NAVIER-STOKES devient donc :

$$\mu(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \vec{f}_{ext}$$

or (cf. annexe A.1.5) $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}$ d'où l'équation :

$$\mu(\vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + -\vec{\nabla} e_p$$

Multiplions l'équation par le déplacement infinitésimal $\vec{dl} = \vec{v} \cdot dt$ **le long d'une ligne de courant** ; on obtient :

$$\vec{dl} \cdot (\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}) = 0 = -\vec{dl} \cdot \vec{\nabla} (P + \mu \frac{v^2}{2} + e_p) = -d(P + \mu \frac{v^2}{2} + e_p)_{\text{ligne}}$$

THEOREME DE BERNOULLI : Le long d'une ligne de courant,

$$P + \mu \frac{v^2}{2} + e_p = \text{Constante}$$

Par exemple, dans le champ de pesanteur on obtient

$$P + \mu \frac{v^2}{2} + \mu g z = \text{Constante}$$

Remarques :

- d'une ligne de courant à l'autre, c'est la valeur de la constante qui change. De plus l'utilisation du théorème de Bernoulli exige de connaître la forme des lignes de courant.
- la conservation de la quantité $P + \mu \frac{v^2}{2} + \mu g z$ exprime la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant (cf. annexe) :
 - $\mu \frac{v^2}{2}$ représente l'énergie cinétique volumique
 - $\mu g z$ l'énergie potentielle volumique de pesanteur
 - et la pression P représente l'énergie potentielle volumique associée aux forces de pression.

4.1.2 Exemples d'application

Formule de Toricelli :

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Toricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur de liquide h .

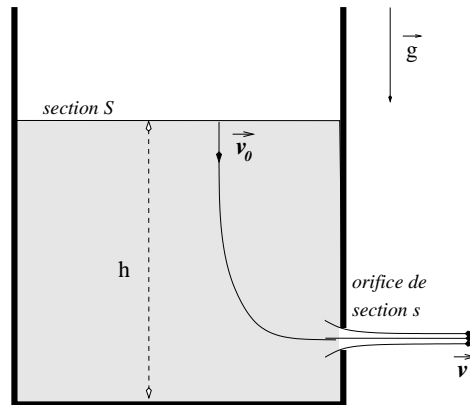


FIG. 4.1 – Vidange d'un réservoir.

On fera les hypothèses suivantes :

- La section S du cylindre est très grande devant la section de l'orifice : $s \ll S$.
- On néglige la viscosité (cylindre pas trop étroit)
- On considère le liquide incompressible
- Enfin, on considère que l'écoulement est en régime stationnaire.

On cherche à calculer la vitesse d'écoulement v à la sortie du trou. L'application du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant donne :

$$P_{atm} + \mu gh + \frac{1}{2}\mu v_0^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\mu v^2$$

Or, $v_0 \ll v$ car $s \ll S$ d'où :

$$v = \sqrt{2gh}$$

On remarquera que la vitesse a la même expression que celle de la chute libre d'un point matériel dans le champ de pesanteur. Le débit volumique d'écoulement vaut donc :

$$Q_V = sv = s\sqrt{2gh} \text{ (formule de Toricelli)}$$

Remarques :

- En pratique cette formule est applicable à condition que h soit grand devant la taille de l'orifice

- En pratique, le jet de sortie est contractée. La section efficace de sortie est donc plus petite que la section de l'orifice : Si l'on veut tenir compte de ce phénomène il faut remplacer s par αs où α est le coefficient de contraction.

Effet venturi :

Le tube de venturi est un tube horizontal qui présente un étranglement. Lors d'un écoulement stationnaire, la conservation du débit impose une augmentation de vitesse au niveau de l'étranglement et la relation de Bernoulli impose alors une dépression au même niveau.

Ainsi quand un écoulement rencontre un étranglement il y a dépression ; c'est l'effet Venturi.

Conséquences :

- Artériosclérose
- Incidents maritimes par effet venturi
- Applications :
 - la trompe à eau des chimistes.
 - Le pulvérisateur

Tube de pitot :

Le tube de Pitot permet la mesure de la vitesse d'écoulement d'un gaz subsonique ($v \ll c_{son}$). On peut en effet le considérer incompressible dans ce cas. On pratique dans un tube un orifice de prise de pression en A et en B. Le point A est un point d'arrêt car la vitesse est nulle (il n'y a pas d'écoulement dans l'orifice, c'est juste une prise de pression). Loin de l'obstacle (le tube de pitot) l'écoulement est supposé uniforme de vitesse v et de pression P_0 . En B la pression vaut P_0 car les lois de l'hydrostatique s'appliquent dans une direction perpendiculaire à un écoulement parallèle permanent incompressible (cf. exercice). En A (point d'arrêt), en utilisant la relation de Bernoulli, la pression vaut

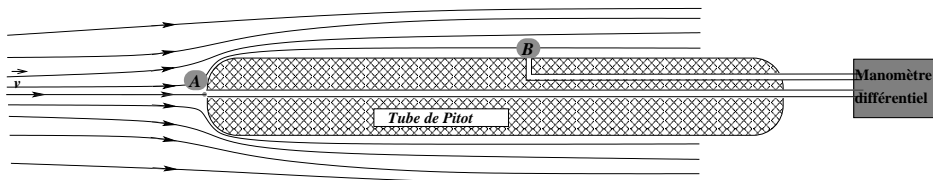


FIG. 4.2 – Tube de Pitot.

$$P_A = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

En B, $P_B = P_0$. d'où

$$v = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\mu}}$$

Exemple : Une vitesse $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$ donne naissance à une différence de pression $\Delta P = 60 \text{ Pa} = 0,6 \text{ mbar}$ (l'air à une masse volumique $\mu \approx 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$)

portance d'une aile d'avion : explication qualitative (et discutable)

4.2 Écoulements irrotationnels

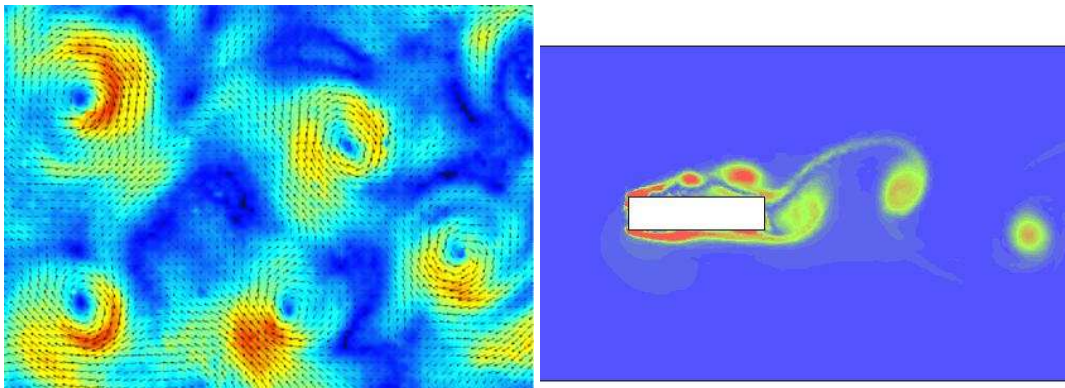
4.2.1 Vecteur tourbillon

On dit qu'un écoulement est tourbillonnaire si

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$$

partout ou en certains points. On définit le **vecteur tourbillon** ou la **vorticité** par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$



(a) Champs de vorticité montrant des cyclones intenses dans un écoulement

(b) vortex de sillage.

FIG. 4.3 – Exemples d'écoulements rotationnels.

Montrons une propriété des fluides parfaits. Si l'on prend le rotationnel de l'équation d'Euler on obtient, dans le cas où le champ de force extérieur dérive d'une énergie potentielle et sachant que le

rotationnel d'un gradient est nul :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$$

ce qui implique que lorsque le fluide est, à un instant donné, irrotationnel ($\vec{\Omega} = \vec{0}$ partout) il le reste ($\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \vec{0}$). **Autrement dit un fluide parfait initialement sans vorticité ne peut pas devenir rotationnel. C'est grâce à la viscosité que les tourbillons apparaissent.**

4.2.2 Potentiel des vitesses

Lorsque l'écoulement est *irrotationnel*, le champ des vitesses dérive d'un gradient (le rotationnel d'un gradient est nul) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t)$$

où Φ est le *potentiel des vitesses*.

$$\vec{\nabla} f(x, y, z)$$

Rappel : Les surfaces de niveau d'un champ scalaire $f(x, y, z)$ sont perpendiculaires aux lignes de champ de $\vec{\nabla} f(x, y, z)$.

Ainsi, à un instant t fixé, les lignes d'écoulement sont perpendiculaires aux surfaces $\Phi = C^{te}$.
exemples :

- le potentiel $\Phi(x, y, z) = x$ correspond à un écoulement stationnaire uniforme unidirectionnel
- $\Phi(\rho, \theta, z) = \frac{Q}{\rho}$ correspond à un écoulement stationnaire axi-fuge : les lignes d'écoulement sont suivant \vec{u}_ρ .

Propriété de la fonction potentiel : si le fluide est incompressible on a $\text{div } \vec{v} = 0$ ce qui donne

$$\Delta \Phi = 0$$

le potentiel des vitesses obéit à l'équation de Laplace. Il y a donc une analogie possible entre un écoulement potentiel et un problème électrostatique dans le vide : Rappelons que dans le vide, le potentiel électrostatique obéit à l'équation de Laplace. De plus, on montre en mathématique que **la solution de l'équation de Laplace muni d'un jeu de conditions aux limites, est unique** : Si on trouve une solution compatible avec les conditions aux limites cette solution est la bonne ! (d'où la technique des images électriques employée en électrostatique)

Théorème de Bernoulli pour un écoulement potentiel : si l'on reprend la démonstration du théorème de Bernoulli on s'aperçoit que pour un écoulement incompressible et irrotationnel on obtient :

$$\mu \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left(P + \mu \frac{v^2}{2} + e_p \right)$$

ce qui donne

$$P + \mu \frac{v^2}{2} + e_p + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t)$$

4.3 Théorème de Bernoulli généralisé

4.3.1 Cas d'un écoulement avec échange d'énergie

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un système de conduites, il traverse des machines hydrauliques avec lesquelles il peut échanger de l'énergie :

- des pompes donneront de la puissance mécanique au fluide.
- des turbines recevront de la part du fluide de l'énergie mécanique.

Si l'on note \mathcal{P} la puissance échangée avec le fluide, on a $\mathcal{P} > 0$ pour les pompes et $\mathcal{P} < 0$ pour les turbines. L'énergie que reçoit 1m^3 de fluide pendant 1s vaut :

$$w \text{ (J.m}^{-3}\text{)} = \frac{\mathcal{P} \text{ (J.s}^{-1}\text{)}}{Q_V \text{ (m}^3\text{.s}^{-1}\text{)}}$$

L'équation de Bernoulli se généralise et l'on obtient pour un écoulement $1 \rightarrow 2$:

$$P_1 + \mu \frac{v_1^2}{2} + \mu g z_1 + \frac{\mathcal{P}}{Q_V} = P_2 + \mu \frac{v_2^2}{2} + \mu g z_2$$

4.3.2 Notions de pertes de charge

Un fluide parfait n'existe pas. Lors d'un écoulement dans une conduite, les forces de frottement dissipent une partie de l'énergie cinétique et potentielle ce qui se traduit par l'existence de « pertes de charges » dont il s'agit de tenir compte .

Considérons un écoulement cylindrique horizontal stationnaire et incompressible. Si l'on applique la relation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie on obtient

$$P_1 = P_2$$

Or, expérimentalement, on observe qu'il faut imposer une pression plus importante en entrée pour entretenir le régime permanent. En effet, les forces de viscosité résistent à l'écoulement. Il faut donc

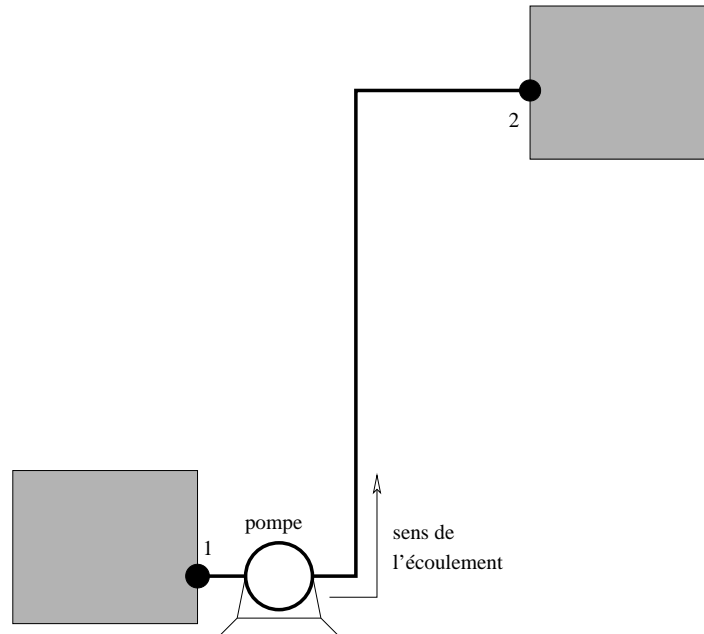


FIG. 4.4 – schéma d'un écoulement stationnaire possible avec une pompe.

imposer une surpression ΔP_f que l'on appelle **perte de charge en pression** et qui est due à l'existence de forces de frottements (viscosité)

Il existe deux types de pertes de charge :

1. Les pertes charges en longueur droite dites pertes de charge régulières : Ce sont donc les pertes dues aux frottement le long du trajet. On verra dans le chapitre suivant une relation entre la perte en pression et le débit. On notera ΔP_r la perte de charge régulière.
2. Les pertes singulières : dans un circuit, la présence de coudes, de robinets, de vannes, de modifications brutales de sections produit des pertes de charge dites singulières. On notera ΔP_s la perte de charge singulière.

En conclusion, pour diminuer l'ensemble des pertes de charge dans une canalisation, afin de diminuer les coûts de fonctionnement dus aux pompes, il faut, quand c'est possible :

- diminuer la longueur de canalisation ;
- diminuer le nombre d'accidents sur la canalisation ;
- diminuer le débit de circulation ;
- augmenter le diamètre des canalisations ;
- faire circuler des liquides le moins visqueux possible ;
- utiliser des matériaux de faible rugosité.

4.3.3 Théorème de Bernoulli généralisé

Lorsque l'on veut tenir compte des pertes de charge et de l'échange d'énergie avec des machines hydrauliques on doit modifier l'équation de Bernoulli et l'écrire sous la forme :

$$P_1 + \mu \frac{v_1^2}{2} + \mu g z_1 + \frac{\mathcal{P}}{Q_V} = P_2 + \mu \frac{v_2^2}{2} + \mu g z_2 + \Delta P_f$$

où ΔP est la perte de charge (exprimé en pascal)

Cette relation est souvent utilisée dans les problèmes de conduite.

Remarque : Dans les problèmes de conduites, on utilise souvent l'approximation des écoulement unidimensionnels, approximation qui revient à confondre la vitesse avec la vitesse moyenne sur une section droite de la conduite. Cette approximation produit des erreurs sur l'expression de l'énergie cinétique. On utilise alors un coefficient correctif pour exprimer l'énergie cinétique volumique :

$$e_c = \frac{1}{2} \beta \mu \bar{v}^2$$

où \bar{v} est la vitesse moyenne et β le coefficient d'énergie cinétique. En pratique les valeurs de β sont les suivantes :

- $\beta = 1$ écoulement piston (vitesse uniforme dans toute la section)
- $\beta = 1,33$ écoulement laminaire visqueux (newtonien)
- $\beta = 1,04 - 1,12$ écoulement turbulent.

Dans la suite nous le prendrons systématiquement égal à 1 sauf indication contraire.

Chapitre 5

Écoulements visqueux

5.1 Écoulement de poiseuille.

5.1.1 Présentation

On s'intéresse à l'écoulement *stationnaire* d'un fluide *visqueux incompressible* dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$. Le tube est horizontal (orienté suivant Oz) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression ΔP entre l'entrée du tube et la sortie du tube. On supposera de plus que l'écoulement est laminaire ($\mathcal{R}_e < 2000$)

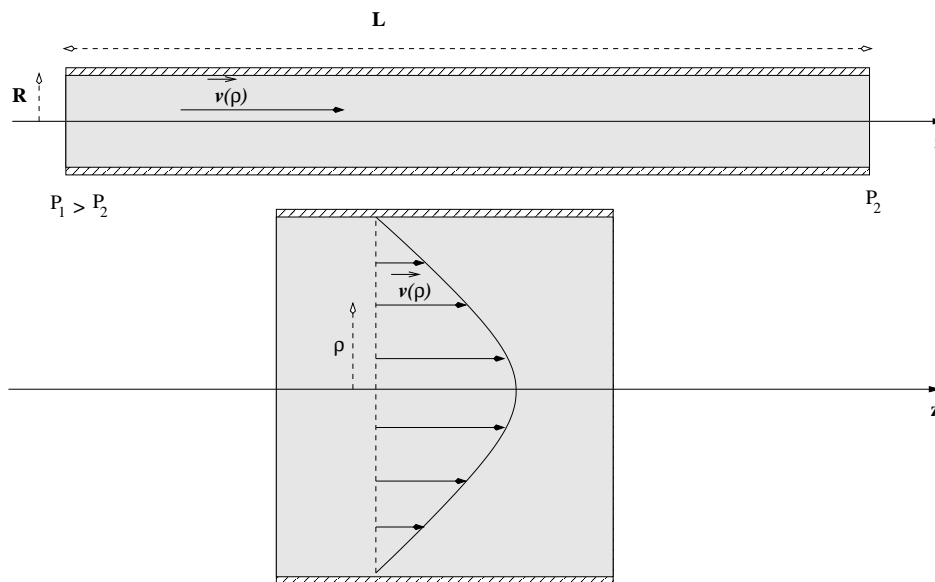


FIG. 5.1 – Écoulement de poiseuille. Le champ de vitesse n'est pas uniforme dans le tuyau.

Invariances du problème : le problème est invariant vis à vis d'une rotation d'axe Oz , le problème

est donc indépendant de l'angle φ (angle du système cylindrique). Le champ de vitesse ne dépend donc que de la distance à l'axe et de la cote z . La force de pression étant suivant Oz , on suppose que l'écoulement est laminaire et parallèle à Oz :

$$\vec{v} = v_z(\rho, z) \vec{k}$$

Enfin, on sait (cf. exercice 1 du chapitre précédent) que les lois de l'hydrostatique peuvent s'appliquer dans une direction perpendiculaire à l'écoulement. Or si l'on considère un tuyau de petite section on pourra négliger $\mu g R$ devant P_1 ou P_2 de telle sorte que l'on peut affirmer que la pression ne dépend pas de ρ . Ceci revient à négliger la pesanteur.

5.1.2 Loi de Poiseuille

Démonstration : Commençons par écrire l'équation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\rho d\rho} + \frac{\partial(v_\varphi)}{\rho d\varphi} + \frac{\partial v_z}{dz} = 0 = \frac{\partial v_z}{dz}$$

On en déduit que la vitesse ne dépend pas de z

$$\vec{v} = v_z(\rho) \vec{k}$$

le terme convectif s'écrit donc : $v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z(\rho) = 0$. Finalement l'accélération est nulle. Ce qui se comprend aisément : les lignes de champ sont des droites horizontales et se confondent avec la trajectoire des particules (régime stationnaire). Or si la vitesse ne dépend pas de z cela signifie que les particules de fluide se déplacent avec une vitesse constante en direction et en intensité. L'accélération est donc nulle.

On peut aussi ajouter que chaque particule de fluide est soumise à deux forces qui se compensent : les forces de pression et les forces de viscosité. Sans force de pression, c'est-à-dire **sans différence de pression il ne peut pas avoir d'écoulement stationnaire**.

Projetons l'équation de Navier Stokes dans la base cylindrique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\rho \partial \varphi} &= 0 \\ \frac{dP}{dz} &= \eta \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dv_z}{d\rho} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, la pression ne dépend que de z . Le terme de gauche de la dernière équation dépend de z alors que le terme de droite dépend de ρ : ces deux termes sont donc constants et la pression varie linéairement avec z . Ainsi on a

$$\frac{dP}{dz} = K = \frac{\Delta P}{L} = \eta \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dv_z}{d\rho} \right)$$

5.1. Écoulement de poiseuille.

45

avec comme contraintes : $v_z(R) = 0$ et $\frac{dv_z}{d\rho}(0)$ fini. On obtient après intégration :

$$v_z(\rho) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(\rho^2 - R^2)$$

On obtient un profil de vitesse parabolique. La vitesse est maximale sur l'axe et nulle sur les parois.

La formule de poiseuille relie le débit volumique avec la différence de pression imposée. Calculons le débit volumique :

$$Q = \int \int \vec{v} dS \vec{n} = \int_0^R v_z(\rho) 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} \text{ (Formule de Poiseuille)}$$

On obtient une formule analogue à la loi d'Ohm :

$$ddp = \text{resistance} * \text{courant} \longleftrightarrow ddp_{\text{pression}} = \text{resistance visqueuse} * \text{debit}$$

Application : mesure de la viscosité : Dans un large réservoir, on place un liquide de masse volumique μ . On fixe au fond du récipient un long tube fin horizontal (longueur L rayon R) : les forces de viscosités sont prépondérantes ici, l'écoulement est très lent (goutte à goutte). La mesure du débit permet de calculer la viscosité η .

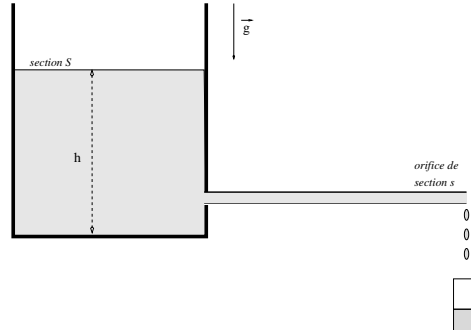


FIG. 5.2 – Mesure de la viscosité.

- En appliquant Bernoulli dans le réservoir (les forces de viscosité n'interviennent pas là) on obtient $\Delta P = \mu gh - \frac{1}{2}\mu v^2 \approx \mu gh$.
- La loi de poiseuille donne

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\mu gh}{L} \Rightarrow \eta = \frac{\pi R^4}{8Q} \frac{\mu gh}{L}$$

- exemple : pour une huile : $\mu = 860 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $h = 0,3 \text{ m}$, $R = 2 \text{ mm}$, $L = 0,15 \text{ m}$ et on mesure un débit $Q = 53 \text{ mL/min}$. D'où

$$\eta = \frac{\pi * (2 \cdot 10^{-3})^4 * 860 * 9,8 * 0,3}{8 * (53 \cdot 10^{-6} / 60) * 0,15} = 0,12 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

5.1.3 Perte de charge

Utilisons le résultat de Poiseuille pour exprimer la perte de charge en faisant intervenir le diamètre D , la longueur L , la vitesse moyenne ainsi que la masse volumique et le nombre de Reynolds :

$$\Delta P = Q \frac{8\eta L}{\pi R^4} = 8\bar{v} \frac{\eta L}{R^2} = 32\bar{v} \frac{\eta L}{D^2}$$

Or le nombre de Reynolds de cet écoulement laminaire s'écrit :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu \bar{v} D}{\eta} \Rightarrow \eta = \frac{\mu \bar{v} D}{\mathcal{R}_e}$$

d'où finalement :

$$\Delta P_r = \frac{64}{\mathcal{R}_e} \cdot \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \frac{L}{D}$$

De manière générale, une analyse dimensionnelle montre que l'on peut écrire la perte de charge régulière sous la forme :

$$\Delta P_r = f(\mathcal{R}_e) \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \frac{L}{D}$$

où f est le **coefficient de perte de charge régulière**. Ce coefficient est sans dimension et dépend du régime d'écoulement ainsi que de la nature du matériaux utilisé (notamment de sa rugosité relative $\frac{\epsilon}{D}$). Le diagramme de Moody (fourni en annexe) donne ce coefficient de perte de charge régulière f en fonction du nombre de Reynolds et du coefficient de rugosité relative ϵ/D .

De la même manière, on peut exprimer les pertes de charges singulières comme suit :

$$\Delta P_s = \xi \frac{1}{2} \mu v_{inc}^2$$

où ξ est le **coefficient de perte de charge singulière** et v_{inc} est la vitesse moyenne incidente du fluide arrivant sur l'obstacle. ξ dépend de la forme de l'obstacle.

Remarque : Dans l'expression du nombre de Reynolds pour une conduite non circulaire, il est d'usage d'utiliser le diamètre hydraulique $D_H = \frac{4 \cdot \text{aire}}{\text{périmètre}}$.

5.2 Force de traînée sur un obstacle

5.2.1 Analyse dimensionnelle

La force de traînée est la force de frottement que produit l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle. Lorsque cette force est dans le sens de l'écoulement on parle de force de traînée ; Lorsqu'elle est perpendiculaire on parle de force de portance. Il s'agit ici de trouver les paramètres pertinents qui interviennent dans l'expression de la force de traînée.

Considérons par exemple, une sphère en mouvement uniforme dans un fluide. Il faut tout d'abord préciser que la viscosité est essentielle pour justifier l'existence d'une force de frottement. Si le fluide est parfait il n'y a pas de traînée car les couches de fluide glissent sur l'obstacle. Les paramètres pertinents sont donc η , v la vitesse de l'obstacle, d le diamètre de l'obstacle, μ la masse volumique du fluide. On définit le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\mu v d}{\eta}$. Il y a donc 4 variables indépendantes qui sont v , d , μ et R_e . La force de traînée est donc fonction de ces quatre variables : $F(v, d, \mu, R_e)$

F peut se mettre sous la forme

$$F = f(R_e) \mu^\alpha d^\beta v^\gamma$$

Une analyse dimensionnelle donne :

$$F = \mu v^2 d^2 f(R_e)$$

De manière générale, pour un obstacle quelconque, on écrira la force de traînée sous la forme :

$$F = \frac{1}{2} \mu v^2 s C_x(R_e)$$

où s est la surface frontale (surface projetée suivant la trajectoire du fluide sur un plan perpendiculaire à cette trajectoire) et C_x le coefficient de traînée (sans dimension) qui dépend du nombre de Reynolds, de la forme de l'obstacle et de sa rugosité (par exemple une balle de golf a un C_x plus petit que celui d'une balle lisse de même diamètre).

Calculer la fonction $C_x(R_e)$ n'est pas simple surtout lorsque R_e est grand. Expérimentalement on observe que la fonction $C_x(R_e)$ est grossièrement décroissante et qu'elle est quasi-constante pour $R_e > 10^6$ (pour une voiture roulant à 100 km/h $R_e \approx 10^7$). Le problème a été résolu dans le cas de la sphère lorsque $R_e < 1$.

5.2.2 Formule de Stokes

Stokes a résolu le problème de la sphère dans le cas où l'écoulement est essentiellement gouverné par la viscosité c'est à dire pour R_e petit. Il obtient :

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v} \text{ (formule de Stokes)}$$

où r représente le rayon de la sphère. Dans ce cas $C_x = \frac{24}{R_e}$ loi bien observée expérimentalement.

Attention, cette loi ne s'applique que pour les petites vitesses et des petites sphères !!

Application en géologie :

décantation de l'argile : si vous mélangez de l'argile constitué de grains que l'on considérera sphériques dans l'eau et que vous laissez reposer : les grains vont décanter c'est à dire sédimenter au fond du récipient. Le temps de décantation donne un renseignement sur la taille des grains. En effet

les grains tombent à une vitesse constante pour laquelle la poids apparent (poids moins la poussée d'Archimède) compense la force de traînée :

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3(\mu_s - \mu_l)g$$

d'où

$$v = \frac{2}{9\eta}(\mu_s - \mu_l)r^2$$

la mesure du temps de décantation donne la vitesse et donc la rayon moyen.

Chapitre 6

Phénomènes de tension de surface

6.1 Notion de tension superficielle

6.1.1 Phénomènes de tension superficielle

Décrivons quelques expériences qui ne peuvent pas s'interpréter avec les lois que l'on connaît jusqu'ici.

Exp 1 : Déposons une goutte de liquide sur un support plan. D'après les lois de l'hydrostatique, la surface libre devrait être une surface plane. Or, en général, le liquide adopte la forme décrite sur la figure 6.1 .

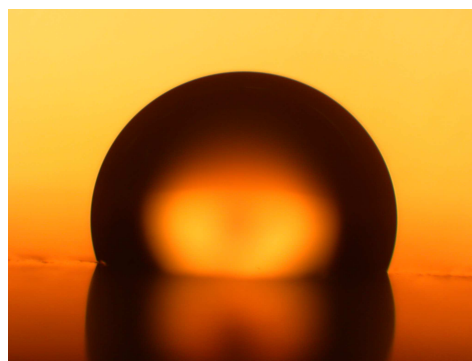
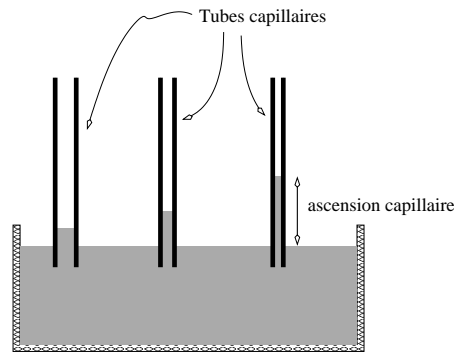


FIG. 6.1 – *État d'équilibre d'une goutte sur un plan*

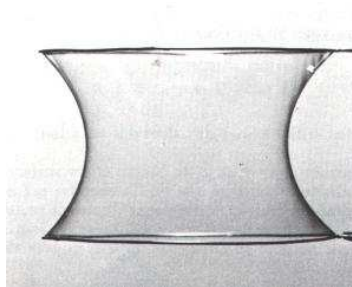
Exp 2 : Plongeons des tubes cylindrique de petit diamètre dans un liquide. On remarque une ascension , dite ascension capillaire, d'autant plus importante que le tube est fin (cf. figure 6.2). Là aussi le phénomène est en contradiction avec la loi de l'hydrostatique.

FIG. 6.2 – *Ascension capillaire*

Exp 3 : Posons délicatement une aiguille métallique à la surface de l'eau. Si elle est suffisamment fine, elle flotte sur l'eau ce qui est en contradiction avec le principe d'Archimède (cf. figure 6.3).

FIG. 6.3 – *Aiguille flottant à la surface de l'eau*

Exp 4 : Formons des films d'eau savonneuse s'appuyant sur un contour (cf. figure 6.4). Les films semblent produire une surface qui a la propriété de posséder une aire minimale. Cette propriété ne découle pas des lois jusqu'ici rencontrées.

FIG. 6.4 – *Film de savon s'appuyant sur deux cercles métalliques pour former une caténoïde.*

Toutes ces expériences montrent qu'il y a une propriété des liquides qui a été omis jusqu'ici. En fait cette propriété ne concerne que l'interface entre deux fluides ou entre un fluide et un solide mais

n'intervient pas au sein d'un fluide. Il s'agit de la **tension superficielle** ou **tension de surface**.

6.1.2 Énergie d'interface

La tension superficielle a pour origine l'**anisotropie des forces d'interaction moléculaire**. En effet, considérons une interface (S) séparant deux fluides non miscibles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 (liquide-vapeur ou liquide-liquide). Au sein d'un fluide, les molécules subissent des interactions attractives à courte portée (Van der Waals et éventuellement liaisons Hydrogènes). Appelons ϵ_1 l'énergie d'interaction entre

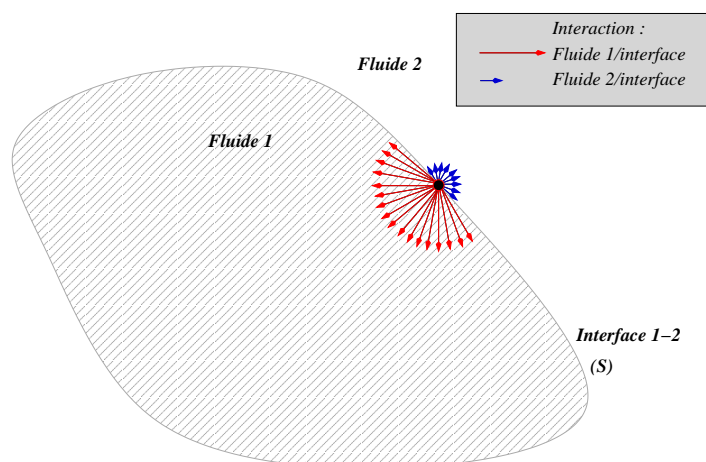


FIG. 6.5 – Interaction avec son environnement, d'une particule de fluide appartenant au fluide 1 et située à l'interface (S).

une molécule de \mathcal{F}_1 et une autre molécule de \mathcal{F}_1 et ϵ_{12} l'énergie d'interaction entre deux particules différentes situées à l'interface. Si N est le nombre de molécule et N_S le nombre de molécule à l'interface, l'énergie du liquide \mathcal{F}_1 vaut

$$E_1 = (N - N_s)\epsilon_1 + N_s\epsilon_{12} = N\epsilon_1 + E_S$$

où $E_S = N_S(\epsilon_{12} - \epsilon_1)$ représente l'énergie de l'interface. Cette énergie est liée à l'**anisotropie des forces d'interaction moléculaire**. Le terme $\epsilon_{12} - \epsilon_1$ est positif sinon il y a miscibilité (les molécules de \mathcal{F}_1 n'ont pas d'affinité avec celle \mathcal{F}_2 et préfèrent être entourées de molécules identiques $\Rightarrow \epsilon_{12} > \epsilon_1$). Enfin le nombre de molécules à l'interface augmente avec la surface. Ainsi l'énergie inter-faciale est proportionnelle à la surface

$$E_S = \gamma S$$

où γ est par définition la **tension superficielle**. Cette grandeur positive caractérise l'interface et s'exprime en J/m^2 .

Conséquences :

- augmenter la surface d'un liquide coûte de l'énergie : Ainsi un liquide adoptera une forme qui minimise la surface compte tenu des contraintes ; si les seules forces sont les forces de tensions superficielles alors on montre que pour un volume donné la surface qui minimise l'énergie est une sphère. Par exemple une goutte d'huile dans un liquide de masse volumique identique sera sphérique.
- on montre aussi que deux gouttes sphériques auront intérêt à former une goutte plus grosse. Ainsi quand on agite énergiquement un mélange eau-huile on obtient une émulsion de petites gouttes d'huile dans l'eau. Cette émulsion est instable : les petites gouttes *coalescent* (on parle du phénomène de *coalescence*) et l'on obtient après un certain temps de l'huile avec de l'eau au dessous.

6.1.3 Forces de tension

Considérons un film de liquide sur un cadre rectangulaire dont un des coté est mobile. Le liquide cherchant à minimiser sa surface, il faut exercer une force sur la tige mobile pour maintenir la surface constante. Appliquons la méthodes des travaux virtuels pour calculer la force qu'exerce le fluide. Pour un déplacement quasi-statique dx on a :

$$\delta W = -f dx = -dE_S = -\gamma 2l dx$$

où le facteur 2 provient du fait qu'il s'agit d'une lame double (deux interfaces liquide-gaz), et où l désigne la longueur de la tige. On obtient ainsi :

$$\gamma = \frac{f}{2l}$$

La tension superficielle est donc *une force par unité de longueur*. On peut donc exprimer γ en N.m^{-1} .

De façon général, si l'on considère une interface entre deux fluides et que l'on isole un élément de surface délimité par un contour (C), chaque portion dl du circuit (C) sera soumis à une force df perpendiculaire à dl et tangent à l'interface telle que

$$df = \gamma dl$$

6.1.4 Mesure et propriétés de la tension superficielle

Mesure : une méthode souvent employée pour les liquides est la méthode par arrachement. On plonge un anneau lisse dans le liquide à étudier et l'on soulève l'anneau. On soulève ainsi un film qui

s'appuie sur l'anneau. On mesure la force qu'exerce l'interface à l'aide d'un dynamomètre. Cette force est maximale quand le poids et la force de tension superficielles sont parallèles. Elle

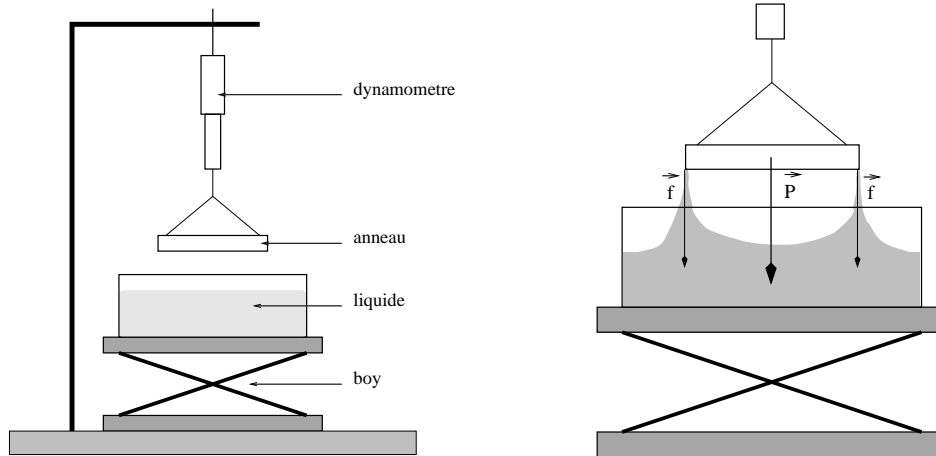


FIG. 6.6 – Méthode de mesure de la tension superficielle.

vaut :

$$F = mg + 2\pi(r_1 + r_2)\gamma \approx 2\pi r(r_2 - r_1)h\mu g + 4\pi r\gamma$$

si $r_1 \approx r_2 = r$.

Ordre de grandeur : à température ordinaire, pour les liquides, la tension superficielle vaut quelques mJ/m^2 (cf. tableau)

TENSION SUPERFICIELLE DE QUELQUES INTERFACES LIQUIDES-AIR		
Liquides	température	tension superficielle
Mercure	18 °C	475 mJ/m ²
Eau	20 °C	73 mJ/m ²
Eau	80 °C	62 mJ/m ²
Huile d'olive	20 °C	32 mJ/m ²

La tension superficielle varie avec :

- la température ; γ diminue quand la température augmente. En général on utilise une loi phénoménologique linéaire

$$\gamma = \gamma_0(1 + a\theta)$$

avec $a < 0$.

- la présence de tensions actifs : la tension superficielle diminue fortement en présence de tensio-actifs.

6.2 Théorème de Laplace et loi de Jurin

6.2.1 Pression capillaire dans une bulle de savon

Un petit contour circulaire pris dans la surface libre plane d'un liquide en équilibre est soumis à des forces de tension superficielle situées dans son plan et dont la résultante est nulle. Par contre, pour une surface sphérique, les forces exercées sur ce même contour ont une résultante orientée vers l'intérieur de la sphère ; il faut donc une surpression ΔP pour que l'équilibre existe. On voit immédiatement que plus la courbure est importante et plus ΔP sera grand.

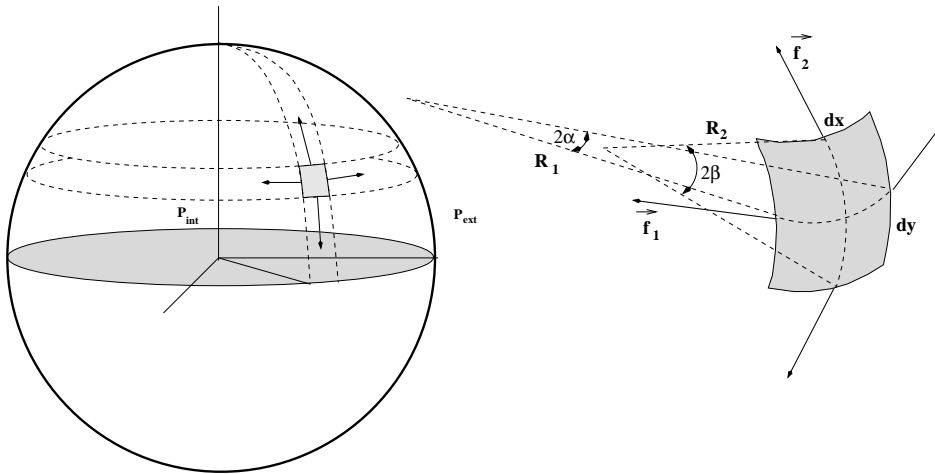


FIG. 6.7 – Théorème de Laplace.

Loi de Laplace (démonstration en annexe) : Lorsqu'une membrane liquide enferme un gaz, il existe une surpression entre l'intérieur et l'extérieur donnée par la loi :

$$\Delta P = 2\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ pour une interface gaz - liq - gaz}$$

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ pour une interface liq - gaz}$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la membrane

Ordre de grandeur : pour une bulle de savon : $R \approx 1 \text{ cm}$ $\gamma \approx 25 \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^2 \Rightarrow \Delta P \approx 10 \text{ Pa}$:
pour faire des grosses bulles il faut fournir beaucoup d'énergie (surface importante) et générer une faible surpression \Rightarrow il faut souffler tout doucement et longtemps.

Applications : Dans la loi de Laplace, R_1 et R_2 sont les rayons de courbures principaux. dans le cas d'une sphère ces deux rayons sont égaux au rayon de la sphère. Ainsi pour une bulle de savon sphérique la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur vaut

$$\Delta P = P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{R}$$

et pour une bulle de gaz dans un liquide

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$$

Ainsi la pression est plus importante dans les petites bulles. C'est ce qui explique le phénomène de **mûrissement** d'une mousse : dans une mousse (mousse de bière par exemple) le gaz contenu dans les petites bulles traverse la membrane liquide (diffusion des gaz à travers les membranes) pour se diriger dans les zones de moins grande pression, c'est-à-dire, dans les grosses bulles. Les petites bulles se vident donc dans les grosses, la mousse s'enrichit en grosses bulles.

Surface minimale : quand on trempe une structure métallique dans une eau de savon, on obtient une surface minimale (l'interface va chercher à minimiser l'énergie superficielle) qui a la propriété suivante : si la surface est ouverte, $\Delta P = 0$ et donc

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

On dit que la courbure moyenne est nulle. Dans la plupart des cas on obtient des lames planes qui forment une surface minimale ($R_1, R_2 \rightarrow \infty$). On peut aussi obtenir des lames avec deux rayons de courbures opposés (exemple de la caténoïde observée sur la figure 6.4)

6.2.2 Ascension capillaire - loi de JURIN

Description : quand on plonge un capillaire propre (tube étroit de rayon r) dans de l'eau, on observe l'ascension d'une colonne d'eau dans le capillaire malgré la pesanteur (cf. schéma 6.2). Cette ascension est d'autant plus importante que le rayon est petit.

On peut utiliser le théorème de Laplace pour démontrer la loi de Jurin (cf. annexe) :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

où θ est l'angle de contact.

Exemple : pour l'eau dans un tube de verre propre l'angle de raccordement vaut 0 (l'eau mouille le tube). Si $r = 0,01 \text{ mm}$ on obtient

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} = 1,5 \text{ m}$$

l'ascension est importante si le tube est très étroit.

Annexe A

Formulaire mathématique

A.1 Opérateurs

A.1.1 L'opérateur Gradient

L'opérateur **gradient** est un *opérateur différentiel linéaire vectoriel*. Il s'applique à une fonction scalaire (champ scalaire fonction de l'espace et du temps) et donne un champ vectoriel (fonction de l'espace et du temps). Il se lit « gradient » ou « nabla » et se note :

$$\overrightarrow{A}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}}f(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}f(\vec{r}, t)$$

Par définition, l'opérateur gradient est tel que la différentielle d'un champ scalaire indépendant du temps, s'exprime comme le produit scalaire de l'opérateur gradient et du déplacement infinitésimal :

$$df(\vec{r}) = \vec{\nabla}f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

d'où les propriétés suivantes :

- Les lignes de champ du champ vectoriel $\vec{A} = \vec{\nabla}f$ sont perpendiculaires aux surfaces de niveau de f .
- De plus le champ $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}f(\vec{r})$ est à circulation conservative. On en déduit que ce champ est à rotationnel nul (cf. plus loin) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}f) = \vec{0}$$

Le tableau A.1 donne les différentes expressions du gradient dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	$\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$
cartésiennes	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$
cylindriques	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$
sphériques	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right.$

TAB. A.1 – Expressions de l'opérateur gradient dans différents systèmes de coordonnées.

A.1.2 L'opérateur Divergence

L'opérateur **divergence** est un *opérateur différentiel linéaire vectoriel* qui s'applique à un champ vectoriel et qui donne un champ scalaire. Il se lit « divergence » et se note :

$$\text{div} \overrightarrow{A}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}(\vec{r}, t)$$

Cette notation permet de retenir l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div} \overrightarrow{A}(\vec{r}, t) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le tableau A.2 donne les différentes expressions de la divergence d'un champ vectoriel exprimé dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	$\text{div} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}$
cartésiennes	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
cylindriques	$\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial(A_\varphi)}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
sphériques	$\frac{\partial(r^2 A_r)}{r^2 \partial r} + \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{r \sin \theta \partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{r \sin \theta \partial \varphi}$

TAB. A.2 – Expressions de l'opérateur divergence dans différents systèmes de coordonnées.

Propriétés :

- $\text{div}(f \cdot \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (f \overrightarrow{A}) = f \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = f \text{div} \overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$
- $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = \nabla^2 f = \Delta f$ (opérateur laplacien) La divergence d'un gradient est l'opérateur laplacien (voir section A.1.4)

A.1.3 L'opérateur Rotationnel

L'opérateur **rotationnel** est un *opérateur différentiel linéaire vectoriel* qui transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel. Il se lit « rotationnel » et se note :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$$

Cette notation permet de retenir l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le tableau A.3 donne les différentes expressions du rotationnel dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$
cartésiennes	$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$
cylindriques	$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\rho \partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{d\rho} \\ \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\rho d\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\rho d\varphi} \end{cases}$
sphériques	$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{r dr} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{dr} - \frac{\partial A_r}{d\theta} \right) \end{cases}$

TAB. A.3 – Expressions de l'opérateur rotationnel dans différents systèmes de coordonnées.

Propriétés :

- $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} f) = \overrightarrow{0}$ Le rotationnel d'un gradient est nul.
- $\overrightarrow{\text{rot}} f \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge (f \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\nabla} f \wedge \overrightarrow{A} + f \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \overrightarrow{A} + f \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}$
- $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}) \overrightarrow{A} - (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) \overrightarrow{B} + (\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{B}$
- $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\nabla} (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) - \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \overrightarrow{A}) - \Delta \overrightarrow{A}$

A.1.4 L'opérateur Laplacien

L'opérateur **laplacien** est un *opérateur différentiel linéaire* qui transforme un champ vectoriel ou scalaire en un champ de même nature. Cet opérateur s'obtient en prenant la divergence du gradient. Il

se lit « laplacien » et se note :

$$\Delta f(\vec{r}, t) = \nabla^2 f(\vec{r}, t) \text{ (laplacien scalaire)}$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}, t) = \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = (\nabla^2 A_x) \vec{u}_x + (\nabla^2 A_y) \vec{u}_y + (\nabla^2 A_z) \vec{u}_z \text{ (laplacien vectoriel)}$$

La notation permet de retenir l'expression du laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(\vec{r}, t) = \nabla^2 f(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le tableau A.4 donne les différentes expressions du laplacien scalaire dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	$\Delta f = \nabla^2 f$
cartésiennes	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
cylindriques	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{\partial^2 f}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{r^2 \sin \theta \partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

TAB. A.4 – Expressions de l'opérateur Laplacien dans différents systèmes de coordonnées.

A.1.5 Terme convectif dans l'accélération

Le terme convectif dans l'accélération d'une particule de fluide s'écrit $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$. Explicitons la composante suivant Ox de ce terme en utilisant l'égalité $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ avec $\vec{A} = \vec{v}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} v_x$ et $\vec{C} = \vec{u}_x$:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x) \vec{u}_x = (\vec{v} \cdot \vec{u}_x) \vec{\nabla} v_x - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x) = v_x \vec{\nabla} v_x - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v_x^2 - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{i})$$

donc

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x + \vec{\nabla} v_y \wedge \vec{u}_y + \vec{\nabla} v_z \wedge \vec{u}_z) = \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

A.1.6 Théorème de la divergence

$$\int \int_S \vec{A} dS \vec{n} = \int \int \int_V \text{div } \vec{A} d\tau$$

où S est une surface fermée, \vec{n} un vecteur unitaire normal à la surface et dirigée vers l'extérieur et V le volume délimité par S .

A.1.7 Théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot dS \vec{n}$$

où C est un circuit fermé orienté, S une surface quelconque s'appuyant sur le contour C et \vec{n} un vecteur unitaire normal à S dont l'orientation est liée à l'orientation du circuit par la règle du tire-bouchon.

Annexe B

Interprétation énergétique du théorème de Bernoulli.

Le théorème de Bernoulli exprime tout simplement la conservation de l'énergie. Pour fixer les idées on donnera une interprétation énergétique du théorème de Bernoulli dans le cas où le fluide est plongé dans un champ de pesanteur.

Considérons, un tube de courant de section infinitésimale (c'est-à-dire une ligne de courant) et appliquons le *théorème de l'énergie cinétique* entre deux instants voisins t et $t + dt$:

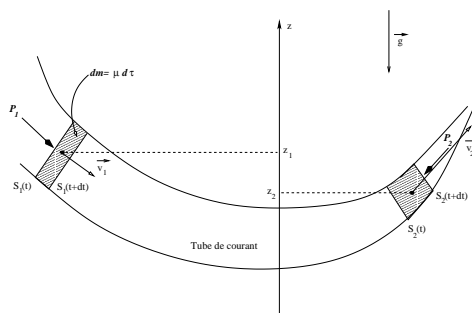


FIG. B.1 – Conservation de l'énergie dans un tube de courant.

$$dE_c = \sum \delta W$$

À instant t le système étudié est une portion du tube de courant compris entre les sections $S_1(t)$ et $S_2(t)$. À l'instant $t + dt$ la section $S_1(t)$ s'est déplacée de $v_1 dt$ et la section $S_2(t)$ de $v_2 dt$. Chaque surface balaye le même volume (fluide incompressible)

$$d\tau = v_1 S_1 dt = v_2 S_2 dt$$

- La variation d'énergie cinétique s'écrit $dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t) = \frac{1}{2}dm(v_2^2 - v_1^2)$ où $dm = \mu d\tau$ est la masse balayée par le déplacement du système. Ici la condition d'écoulement stationnaire a été utilisée.
- Le travail des forces de pression $\delta W_p = - \int P_{ext}dV = (P_1 - P_2)d\tau$ où $d\tau$ est le volume balayé.
- travail des forces de pesanteur : $\delta W_g = -dE_p = -dm \cdot g(z_2 - z_1)$.

On en déduit la relation :

$$P_1 + \mu \frac{v_1^2}{2} + \mu g z_1 = P_2 + \mu \frac{v_2^2}{2} + \mu g z_2$$

Ainsi on retrouve la conservation de la quantité $P + \mu \frac{v^2}{2} + \mu g z$. On peut donc dire que :

- $\mu \frac{v^2}{2}$ représente une énergie cinétique volumique
- $\mu g z$ une énergie potentielle volumique de pesanteur
- et la pression P représente une énergie potentielle volumique associée aux forces de pression.

Annexe C

Démonstrations du théorème de Laplace et de la loi de Jurin.

C.1 Théorème de Laplace

Revenons sur la figure du § 6.2.1. La force de tension superficielle qui s'exerce sur l'élément de surface vaut

$$df = 2f_1 \sin \alpha + 2f_2 \sin \beta$$

Or, les angles sont liés aux rayons de courbures :

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{dx}{2R_1} \\ \sin \beta &= \frac{dy}{2R_2}\end{aligned}$$

et les forces sont liées à la tension superficielle par

$$\begin{aligned}f_1 &= \gamma dy \\ f_2 &= \gamma dx\end{aligned}$$

ce qui donne

$$df = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dx dy$$

Cette force doit être contrebalancée par une force de pression

$$df = \Delta P dx dy$$

D'où l'on en déduit la loi de Laplace :

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

formule que l'on peut utiliser s'il y a une seule interface (par exemple dans le cas d'une bulle d'air dans un liquide). Lorsque l'on est en présence d'une double lame (par exemple une lame de savon dans l'air présente deux interfaces) il faut ajouter un facteur 2. Dans ce cas la formule devient

$$\Delta P = 2\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

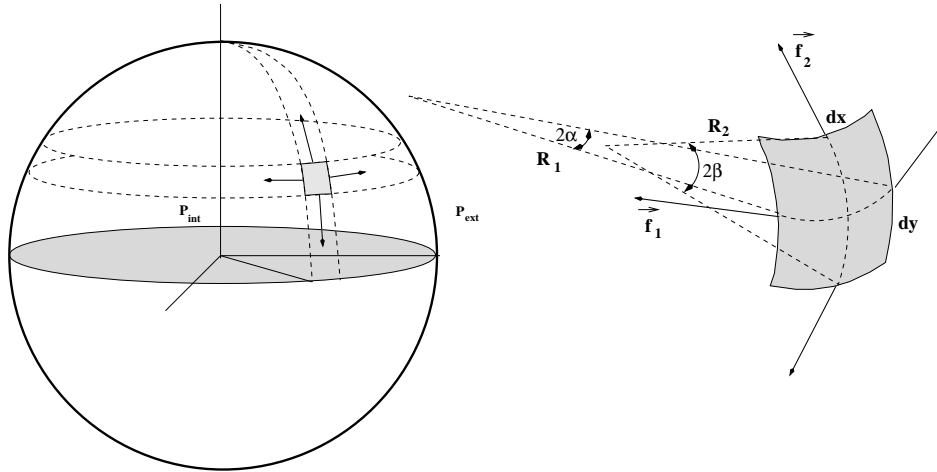


FIG. C.1 – Théorème de Laplace.

C.2 Loi de Jurin

On peut utiliser le théorème de Laplace pour démontrer la loi de Jurin. En effet considérons l'interface liquide raccordée à la paroi du tube avec un angle θ . L'équilibre est le résultat de la compétition entre le poids de la colonne de liquide et la tension superficielle. On note r le rayon du tube et h la hauteur capillaire. faisons un bilan des forces :

- le poids de la colonne de liquide vaut $P \approx \pi r^2 h \mu g$.
- la force de tension superficielle peut se calculer à l'aide de la loi de Laplace : l'air étant à la pression P_0 la pression qui règne dans le liquide au point le plus haut vaut $P_0 - \Delta P$ avec $\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$ où R est le rayon de courbure de l'interface. Soit θ l'angle de raccordement. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'interface est plane et $h = 0$.
Si $\theta < \frac{\pi}{2}$ le haut de la colonne est en dépression $\Rightarrow h > 0$
Si $\theta > \frac{\pi}{2}$ le haut de la colonne est en surpression $\Rightarrow h < 0$
- de manière générale, le rayon de courbure vaut $R = \frac{r}{\cos \theta}$ et $\Delta P = \frac{2\gamma \cos \theta}{r}$. La force de pression vaut donc $F_z = \Delta P \pi r^2 = 2\pi r \gamma \cos \theta$.

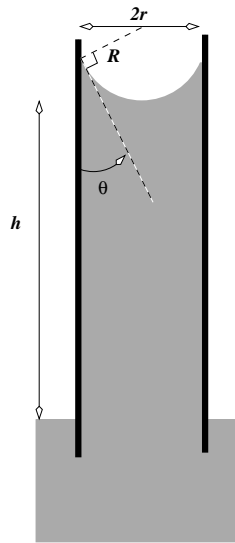


FIG. C.2 – Ascension capillaire.

○ l'équilibre des forces donne :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{r} \text{ (loi de Jurin)}$$

La hauteur d'ascension est inversement proportionnelle au diamètre des tubes

Annexe D

Diagramme de Moody

Le diagramme de Moody permet de connaître le coefficient de perte de charge régulière f en fonction du nombre de Reynolds et du coefficient de rugosité relative ϵ/D .

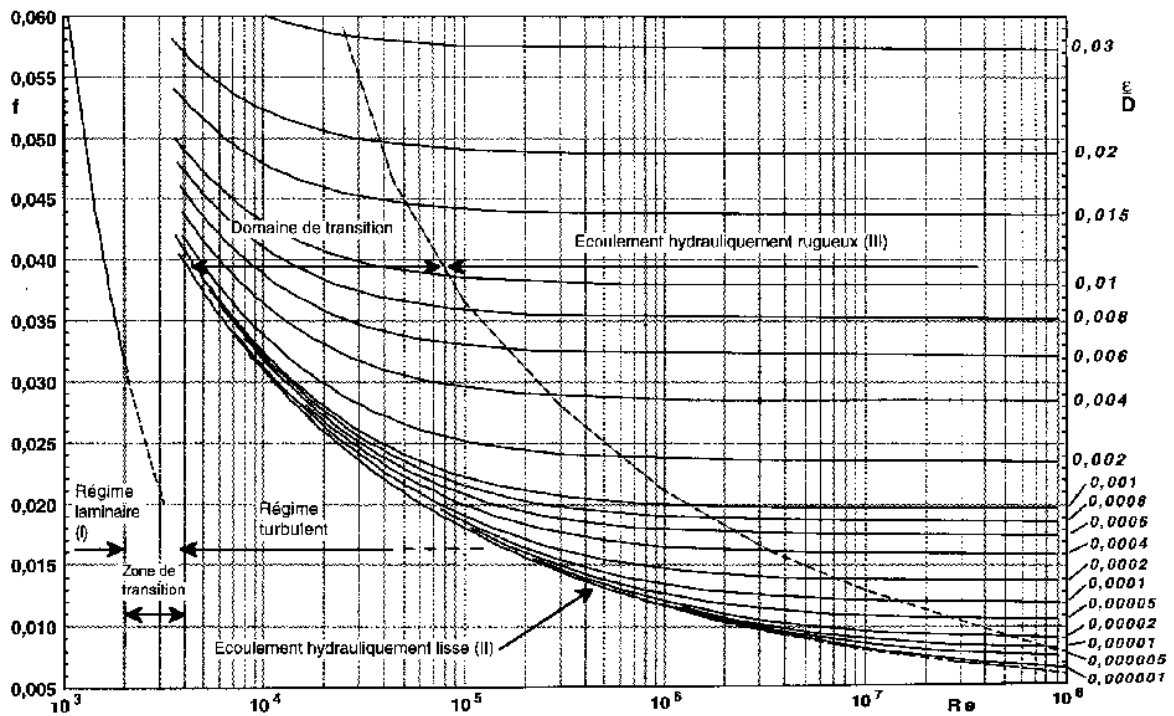


FIG. D.1 – Diagramme de Moody